

现代应用数学丛书

偏微分方程

〔日〕南云道夫 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

偏 微 分 方 程

〔日〕南云道夫 著

錢 端 壯 譯

林 堅 冰 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。全书共分七章,第一章介绍解析方程的一般理论,第二章介绍一阶拟线性方程,第三章为一般的一阶方程,四、五两章叙述二阶方程,六、七两章分别讨论椭圆型和双曲型方程。本书可供各高等学校作为教学参考书,也可供工程师、科学研究工作者作参考。

现代应用数学丛书

偏 微 分 方 程

原 书 名 偏 微 分 方 程 式
原 著 者 [日] 南 云 道 夫
原 出 版 者 岩 波 书 店
译 者 钱 端 壮
校 者 杨 坚 冰

上海科学技术出版社出版

(上海南京二路30号)

上海市书刊出版业营业许可出字第

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

上海市印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6 12/32 字数 150,000

1961年11月第1版 1961年11月第1次印刷

印数 1—17,000

统一书号: 13119·425

定 价: (十四) 1.10 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册,分成A、B兩組,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分組編号,陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广,其內容都和現代科学技术密切有关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陸續出版的,写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最近发展状况,并对全书內容作一些評价,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志,为提高书籍的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

記 号 說 明

現在就本书,特別就第1~3章中所用的記号加以說明。

偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, 恒用記号 ∂_x , ∂_{xy}^2 代替。

如只要区别独立变数 x_1, \dots, x_n 的番号, 則 ∂_{x_i} 有时簡写成 ∂_i 。

E^n 表示 n 維 Euclid 空間 [n 个实数组 (x_1, \dots, x_n) 的全变域]。

$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ 表示 E^n 中的一点 [即 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的某一特殊值]。

$m \times n$ 矩陣 $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 簡記为 $(a_{ij} \quad \substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n})$ 。

δ_{ij} 表示 Kronecker 記号, 即当 $i=j$ 时, $\delta_{ii}=1$; 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$ 。

对于一組等式, 譬如 $x=a(s)$, $y=b(s)$, $z=c(s)$, 恒用写法 $(x, y, z) = \{a, b, c\}(s)$ 。

Rk (矩陣) 代表矩陣的秩数。

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \left| \partial_\nu f_\mu(x) \quad \substack{\mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n} \right| \quad (\text{函数行列式}),$$

$$\int f(x) d^n x = \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

另外, 对于偏微分的記号有时也用普通的写法, 如 f_x , f_{xy} 等。

在第1~3章中, 將討論解析的偏微分方程的一般理論, 以及主要对于单独的一阶偏微分方程, 讲述一些古典的求解理論。

目 录

出版說明

記号說明

第1章	解析的偏微分方程的一般理論	1
§ 1	偏微分方程中有关的定义	1
§ 2	解析的偏微分方程的初始值問題	3
§ 3	特征面 (一般 Cauchy 問題)	9
§ 4	Holmgren 定理	14
第2章	一阶拟綫性偏微分方程	21
§ 5	特征曲綫	21
§ 6	Cauchy 存在定理	24
§ 7	变成齐次綫性方程的变换	27
§ 8	主部相等的联立拟綫性微分方程組	32
第3章	一般的单独一阶的偏微分方程	34
§ 9	面素組	34
§ 10	一阶偏微分方程, 正常解; 奇异解	37
§ 11	特征帶	40
§ 12	Cauchy 存在定理	44
§ 13	完全解	50
§ 14	简单的一阶偏微分方程	57
§ 15	由完全解导出特征帶	61
§ 16	Hamilton-Jacobi 偏微分方程	65
§ 17	初始值問題的解的唯一性	70
第4章	两个独立变数的二阶偏微分方程和方程組	77
§ 18	二阶半綫性方程的标准型	77
§ 19	标准双曲型偏微分方程	81
§ 20	調和函数	87
§ 21	一阶半綫性偏微分方程組	91

§ 22	双曲型半綫性一阶方程組	98
第5章	一般二阶綫性偏微分方程	109
§ 23	关于二阶綫性方程独立变数的变换	109
§ 24	特征面	112
§ 25	横截向量,特征射綫	116
§ 26	Green 积分公式	118
§ 27	广义解	122
§ 28	二阶常系数方程的标准型	124
§ 29	作为常系数綫性方程解的平面波	127
§ 30	拟綫性方程的特征条件	131
第6章	橢圓型偏微分方程	136
§ 31	边值問題	136
§ 32	Laplace 方程和 Poisson 方程	144
§ 33	二阶橢圓型方程的基本解	151
§ 34	二阶橢圓型方程的 Green 函数	150
§ 35	关于橢圓型方程的补充說明	162
第7章	双曲型偏微分方程	166
§ 36	正規双曲型方程	166
§ 37	Cauchy 問題解的决定区域	171
§ 38	波动方程的解法	177
§ 39	关于双曲型方程的补充說明	186
后記	190
参考书	191
校后記	192

第1章 解析的偏微分方程的一般理論

本章主要是在微分方程具有解析而正則的函数表达形式的假設下進行討論的。这样，为了得到与方程的类型无关而一般正确的理論，我們也只限于討論解析的微分方程具有解析而正則解的情形。但是这里所說的类型，并不象綫性或是非綫性的方程，可以由方程的外表形式来区别（它是由于特征方程的根是虛，或是实的而产生的），一般解的本質的性質（解析性），由于所屬方程的类型不同，有着相异的特性（这一点以后自然会明了）。現在本章中所討論的函数假定它們都是解析而正則的。一般，在公式的形式变换中，必須根据变换中所出現的微分計算的阶数，来假設函数連續可微的次数，但是現在有了正則性的保證，函数就有任意次連續微分的可能，所以沒有必要每次再重复提出討論。

§1 偏微分方程中有关的定义

一般关于独立变数、未知函数及它的偏导数由确定的函数关系結合而成的方程叫做偏微分方程。恒等地滿足这个方程的函数（未知）叫做方程的解。譬如，象

$$(a) \quad yu_x - xu_y = 0, \quad (b) \quad u_{xy} = 0,$$

$$(c) \quad u^2(1 + u_x^2 + u_y^2) = 1$$

就都是偏微分方程，其中 x, y 是独立变数， u 是未知函数。这些方程分別以

$$u = \phi(x^2 + y^2), \quad u = \phi(x) + \psi(y),$$

$$u = \{1 - (x-a)^2 - (y-b)^2\}^{1/2}$$

作为它們的解。这里 ϕ, ψ 是任意的函数（可微的），而 a, b 是任

意的常数。有許多作者把偏微分方程的解称为方程的积分，我們在本书中将避免使用这种叫法。

另外，我們也研究一些与多个未知函数有关的联立偏微分方程組，譬如，象

$$(d) \quad u_x = v_y, \quad v_x = -u_y \quad (u, v \text{ 未知函数}),$$

$$(e) \quad \sum_{j=1}^k a_{ij}(x, y) \partial_x u_j + \sum_{j=1}^l b_{ij}(x, y) \partial_y u_j = \sum_{j=1}^k u_j^2 \quad (i=1, \dots, k)$$

(a_{ij}, b_{ij} 是已知函数, u_1, \dots, u_k 是未知函数),

$$(f) \quad uu_{xx} = v_y^2, \quad vv_{yy} = u_x^2 \quad (u, v \text{ 未知函数}).$$

所謂偏微分方程的阶数^①，就是方程中出現的未知函数的导函数中最大的阶数。在上面的例子中，(a)，(c)，(d)，(e)都是一阶的偏微分方程，(b)，(f)是二阶的偏微分方程。

如果偏微分方程对于未知函数以及它的各阶导函数都是一次齐式，这个方程就叫做綫性方程。(a)，(b)，(d)三个方程都是綫性方程。如果方程是未知函数最高阶导函数的一次齐式，这个方程就叫做拟綫性方程，(e)和(f)就是拟綫性方程。方程(c)既不是綫性的，也不是拟綫性的，这种方程叫做非綫性方程。一般也把一切不是綫性的方程(包括拟綫性的在内)都叫做非綫性方程。在拟綫性方程中最高阶导函数所組成一次齐次式的那一部分，叫做方程的主部。在方程(e)和(f)中，等号的左边部分是方程的主部。若是拟綫性方程的主部內的系数，都是常数或是独立变数的已知函数，这种方程就叫做半綫性方程。(e)是半綫性方程，但(f)不是半綫性方程。对于偏微分方程，除了一阶的偏微分方程(单独方程)以外，研究得比較透徹的主要是綫性方程。

我們可以把常微分方程看成是仅具一个独立变数以及一个未

① 原著者为了避免与行列式的 rank 一字的譯文混淆，把偏微分方程的阶数(order)改譯成位数，現在我們仍用阶数作为 order 的譯文，并把 rank 譯成秩数。

——譯者注

知函数的偏微分方程。相反,如果在偏微分方程中仅仅出現未知函数(它是多个独立变数的函数)对于某一个独立变数的偏导函数的时候,那么对这一个独立变数來說,就可以把偏微分方程看成是常微分方程(其他的独立变数可以认为是未知函数中的任意参数)。

§ 2 解析的偏微分方程的初始值問題

1. 初始值問題 一般关于解析偏微分方程的理論中,最基本的就是 Cauchy 的初始值問題的解的存在定理。所以普通就把初始值問題称为 Cauchy 問題。

首先我們用一个简单的例子,对初始值問題作一个淺近的解釋。

考虑下面的一阶綫性偏微分方程

$$u_x - u_y = 0. \quad (2.1)$$

这个方程的解都具有 $u = \phi(x+y)$ 的形状,其中 ϕ 是任意的函数(这一点可以利用变换 $x+y=\xi$, $x-y=\eta$, 把独立变数变成 ξ 与 η 而导出)。对于这个解,如果說 $x=0$ 时, $u=\phi(y)$, 則(2.1)的解就由解的初始条件

$$x=0 \text{ 时 } u=\phi(y) \quad (\phi \text{ 是任意給定的函数})$$

所唯一决定。

其次,再討論一个二阶綫性偏微分方程

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (2.2)$$

令 $x = (\xi + \eta)/2$, $y = (\xi - \eta)/2$, 把独立变数 x, y 变成 ξ, η , 容易証明方程变成了

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

于是

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta) \quad (\phi, \psi \text{ 是任意函数}).$$

因此(2.2)的解必定是

$$u = \phi(x+y) + \psi(x-y), \quad (2.3)$$

在这里如令 $x=0$, 則

$$u(0, y) = \phi(y) + \psi(-y), \quad u_x(0, y) = \phi'(y) + \psi'(-y).$$

若現在初始条件是

$$x=0 \text{ 时, } u=f(y), \quad u_x=g(y), \quad (2.4)$$

則

$$\phi(y) + \psi(-y) = f(y), \quad \phi'(y) + \psi'(-y) = g(y),$$

因此有

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \frac{1}{2} \left\{ f(y) + \int_0^y g(y) dy \right\}, \\ \psi(-y) &= \frac{1}{2} \left\{ f(y) - \int_0^y g(y) dy \right\}. \end{aligned}$$

于是根据(2.3)就得到

$$u = \frac{1}{2} \left\{ f(x+y) + f(y-x) + \int_{y-x}^{x+y} g(t) dt \right\}. \quad (2.5)$$

相反,若 f, g 是任意函数,可以証明(2.5)必是方程(2.2)的解. 所以(2.2)的解由初始条件(2.4)所唯一决定。(f, g 可看成是任意的已給函数。)

上面的例题指出,一般单独一个偏微分方程的解中包含着任意函数,任意函数的个数就是方程的阶数(任意函数中的独立变数比方程中的独立变数少一个)。有理由来推测,解中的任意函数将由初始条件所唯一地决定。(实际上,一般解中的任意函数或者是初始条件中任意給定的函数,或者是它的变形函数。)

一般的偏微分方程含有多个独立变数。如果对其中某一个独立变数的一个特定值(上面的例中是 $x=0$)来討論初始条件,象这样的变数,为了在考虑初始条件时与其他的独立变数有所区别,我們叫它作时间的变数。相对地叫其他的独立变数为空間的变数。上面的例题中 x 是时间的变数, y 是空間的变数。但是在研究一般偏微分方程的时候,有时并不区别其中那一个变数是时间变数,

那一些是空間變數,而無區別地把獨立變數的全体看成一个空間,并在空間中考慮一个超曲面(如獨立變數的个数是2,即二維空間,則此超曲面化為曲綫,如獨立變數的空間是三維空間,則超曲面為曲面)。我們規定所求的未知函數以及它的導函數要在這個超曲面上取已給的值。要決定這樣的解的問題叫做“一般的 Cauchy 問題”。我們將在后面一節討論這種一般的 Cauchy 問題。

假設偏微分方程的未知函數的最高階導函數中,出現着僅與時間變數有關的偏導函數。當這個偏導函數能夠解出,而用含有獨立變數、未知函數以及其他的偏導函數的形式來表達的時候,這種解出了的方程叫做對時間變數的**基準型**。譬如對於二階的擬綫性方程

$$(1+u_x^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_y^2)u_{yy}=0,$$

如果 x 是時間變數,則

$$u_{xx}=(1+u_x^2)^{-1}\{2u_xu_yu_{xy}-(1+u_y^2)u_{yy}\}$$

是基準型的方程。

2. Cauchy-Kowalewski 定理 為了方便起見,令 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$, $f(x)$ 叫做在 $x=x^0$ 處變數 x (n 個獨立變數) 的解析正則函數,如果在 $x=x^0$ 的鄰域,譬如當 $|x_\nu - x_\nu^0| < \rho_\nu$ ($\nu=1, \dots, n$), f 可以展開成為 $x_1-x_1^0, x_2-x_2^0, \dots, x_n-x_n^0$ 的 n 重冪級數(並且廣義絕對一致收斂),即 $f(x) = \sum a_{\nu_1 \dots \nu_n} (x_1-x_1^0)^{\nu_1} \dots (x_n-x_n^0)^{\nu_n}$. 這時,若 x 表示 n 個復變數,則當 $|x_\nu - x_\nu^0| < \rho_\nu$ 時,這個冪級數也廣義絕對一致收斂。於是對於原始是 n 個實變數的函數 $f(x)$,自然可以唯一的延拓成為 n 個復變數的正則函數(當獨立變數是復變數時,我們就把解析正則的函數簡單地叫做正則函數)。所以本節以後所考慮的函數都是復變數的正則函數。

設 x 是時間變數, $y=(y_1, \dots, y_m)$ 是空間變數, $u=(u_1, u_2, \dots, u_l)$ 是 (x, y) 的未知函數,我們討論下一階的聯立基準型偏

微分方程組

$$\partial_x u_i = f_i(x, y, u, \partial_y u) \quad (i=1, \dots, l). \quad (2.6)$$

为了方便起見，引入記法 $\partial_y u_i = p_i$ ，并把这 lm 个 p_i 簡記作 p 。这样， f_i 是 $1+m+l+lm$ 个独立变数 (x, y, u, p) 的解析正則函数。現在 Cauchy-Kowalewski 定理断言：設 $\phi_i(y)$ 是任意的已給正則函数，則方程組 (2.6) 存在着唯一的一組滿足初始条件 “ $x=x^0, u_i=\phi_i(y)$ ” 的解 $u_i=u_i(x, y)$ 。确切的述說如下：

定理 2.1 (假設) f_i 在 $(x, y, u, p) = (x^0, y^0, u^0, p^0)$ 处是 (x, y, u, p) 的正則函数， ϕ_i 在 $y=y^0$ 处是 y 的正則函数，并且

$$\phi_i(y^0) = u_i^0, \partial_y \phi_i(y^0) = p_i^0.$$

(結論)則存在着在 $(x, y) = (x^0, y^0)$ 处的正則函数組 $u_i = u_i(x, y)$ ($i=1, 2, \dots, l$)，它們滿足联立方程組 (2.6) 以及初始条件 $u_i(x^0, y) = \phi_i(y)$ ，这种正則函数組并且是唯一的。

Cauchy-Kowalewski 定理的証明方法，是把解 u_i 对于 $x-x^0, y-y^0$ ($v=1, \dots, m$) 展开成为整幂級数，幂級数的系数，由于 u_i 要滿足 (2.6) 的緣故，可以由最低項次的系数順次地决定。其次再把这样得到的幂級数与一个优級数来比較而証明它的收斂性。由于本书的篇幅关系我們省略了定理的証明。关于綫性情形的証明可以參看 Petrovski: Lectures on partial differential equations^①, pp. 18~26。一般情形的証明(把方程化成拟綫性方程的方法)見 Courant u. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik II, pp. 35~44。

現在我們来証明联立高阶(但为基准型的)微分方程組的 Cauchy-Kowalewski 定理。証明的方法就是把这个問題化成联立一阶 (2.6) 方程組的問題。

首先为了使問題簡單一些，我們考虑单独一个具有两个独立

① 有中譯本，彼德罗夫斯基：偏微分方程讲义，高等教育出版社。——譯者注

变数的二阶偏微分方程

$$\partial_x^2 u = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}). \quad (2.7)$$

并设初始条件是“ $x=x^0$ 时, $u=\phi(y), u_x=\psi(y)$ ”. 令 $u_x=p, u_y=q$, 容易证明, 上面的方程就化成为下面关于未知函数 (u, p, q) 的联立一阶方程组:

$$\left. \begin{aligned} \partial_x u &= p, & \partial_x q &= \partial_y p, \\ \partial_x p &= f(x, y, u, p, q, \partial_y p, \partial_y q), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

初始条件是: $x=x^0$ 时, $u=\phi(y), p=\psi(y), q=\phi'(y)$. 这组方程根据定理 2.1 具有正则的解 (f, ϕ, ψ 在适当的范围中是正则的). 设这组解是 $(u, p, q) = \{u, p, q\}(x, y)$, 现在来证明 $u=u(x, y)$ 是 (2.7) 的解. 首先由 (2.8) 中的第一式有 $p=u_x$, 所以由第二式有 $\partial_x(q-u_y) = \partial_x q - \partial_y p = 0$, 又因为当 $x=x^0$ 时, $q - \partial_y u = \phi'(y) - \phi'(y) = 0$, 故此 $q=u_y$. 最后第三式就化成为 (2.7). 至于初始条件很明显是一样的.

下面再讨论一般的单独一个高阶方程 (基准型)

$$\partial_x^p u = F(x, y, u, u_x, u_y, \dots, \partial_x^{p-1} u_y, \dots) \quad (2.9)$$

(F 中含有对 u 的最高到 p 阶的导函数, 并且对变数 x 的导函数最高到 $p-1$ 阶). 设初始条件是“ $x=x^0$ 时, $u=\phi(y), \partial_x^i u=\phi_i(y)$ ”. 为了书写方便, 我们引入记法 $\partial_x \equiv \partial_0, \partial_{x^\nu} \equiv \partial_\nu$ ($\nu=1, 2, \dots, m$), 并令

$$\partial_{x^{\nu_1}} \cdots \partial_{x^{\nu_i}} u = u_{\nu_1 \cdots \nu_i},$$

其中 $0 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_i \leq m$ ($i=1, 2, \dots, p-1$), 于是对于这些 ν_1, \dots, ν_i , 上面的方程 (2.9) 就化成为下面的联立一阶基准型的方程组:

$$\left. \begin{aligned} \partial_x u &= u_0, & \partial_x u_{\nu_1 \cdots \nu_{i-1}} &= u_{0\nu_1 \cdots \nu_{i-1}}, \\ \partial_x u_{\nu_1 \cdots \nu_{i-1}\nu_i} &= \partial_{\nu_i} u_{0\nu_1 \cdots \nu_{i-1}}, & (\nu_i \geq 1), \\ \partial_x u_{0 \times (p-1)} &= F(x, y, u, \dots, u_{\nu_1 \cdots \nu_{p-1}}, \dots, \partial_{\nu_p} u_{\nu_1 \cdots \nu_{p-1}}) & (\nu_p \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

(这里的 $0 \times (i)$ 意味着 i 个 0), 現在的初始条件是

$$x = x^0 \text{ 时, } u = \phi(y), \quad u_{0 \times (i)} = \phi_i(y),$$

$$u_{0 \times (i) \nu_1 \dots \nu_r} = \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} \phi_i(y) \quad (\nu_1 \geq 1, r+i \leq p-1).$$

显然, (2.9) 与 (2.10) 分別在上面所給的初始条件下是等价的。

完全同样地可以把联立高价偏微分方程組(基准型)的初始值問題归結为联立一阶偏微分方程組的初始值問題。

注意 1 上面我們把高阶的偏微分方程轉化成联立一阶偏微分方程組。在常微分方程中, 用这种方法必定可以把高阶的方程化成和它等价的联立一阶方程。但是在偏微分方程中如果連同初始条件一起考虑, 高阶方程所化成的等价的联立一阶方程組的意义有所不同。因为轉化后联立一阶方程組的未知函数的个数, 比原高阶方程的阶数为多。

注意 2 根据定理 2.1, 解析而正則的基准型方程在初始值也是解析正則函数的时候存在着正則的解。但是如果初始函数不是解析正則的話 (即使无限次連續可微), 那么就不一定存在着方程的解。譬如考虑一下 Cauchy-Riemann 方程 (x, y, u, v 都是实变数):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y,$$

初始条件是 $x=0$ 时, $u=\phi(y), v=0$. u, v 当 $x \geq 0, |y| < \rho$ 时連續, 并当 $x > 0, |y| < \rho$ 时有全微分。于是 $u+iv=f(z)$ ($z=x+iy$), 当 $x > 0, |y| < \rho$ 时是复变数 z 的正則函数, 并且当 $x \geq 0, |y| < \rho$ 时連續。由于当 $x=0$ 时 f 的虚数部分 $=0$, 所以根据映象原理, $f(z)$ 应该对于 $x=0$ 是对称的, 而可以越过 $x=0$, 直到 $x < 0, |y| < \rho$ 解析延拓。[当 $x < 0$ 时, $f(x+iy) = u(-x, y) - iv(-x, y)$.] 故 $f(iy) = u(0, y) = \phi(y)$ 对于 $|y| < \rho$ 应该是解析正則的。于是如果 $\phi(y)$ 不是解析而且正則的話, 那么滿足 $x=0$ 时, $u=\phi(y), v=0$ 的解便不存在。

注意 3 若 (2.6) 是綫性方程

$$\partial_x u_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu}(x, y) \partial_\mu u_j + \sum_{j=1}^l b_{ij}(x, y) u_j + c_i(x, y),$$

其中 x, y 是复变数, 并且当 $|x-x^0| < \rho, |y_\nu - y_\nu^0| < \rho$ 时, $a_{ij\mu}, b_{ij}, c_i$ 以及 $\phi_i(y)$ 都是正則函数, 而且

$$|a_{ij\mu}| \leq A, \quad |b_{ij}| \leq B,$$

則滿足初始条件“ $x=x^0$ 时, $u_i=\phi_i(y)$ ”的解 u_i , 当 $|x-x^0| < \sigma, |y_\nu - y_\nu^0| < \sigma$

(其中 $\sigma = \sigma(\rho, A, B, m, l)$ 即仅与括弧中的量有关) 时是正则的。(这段証明可以參看前面举出的 Petrovski 的书。) 这个注意将在 Holmgren 定理的証明中用到。

习题 証明联立偏微分方程組 (x, y, u, v 是实变数)

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y + f(y)$$

存在着滿足初始条件: 当 $x=0, |y| < \rho$ 时, $u=0, v=0$ 的解的充要条件是 $f(y)$ 当 $|y| < \rho$ 时为解析正则函数(参照注意 2)。

§ 3 特征面(一般 Cauchy 問題)

1. 联立一阶半綫性方程組的情形 前一节中我們就基准型的方程討論了初始值問題。現在为了平等地处理所有的独立变数, 把它們的全部記作 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 并考虑对未知函数 $u = \{u_1, \dots, u_l\}(x)$ 的联立一阶方程組

$$f_i(x, u, \partial_\mu u) = 0 \quad (i=1, \dots, l)$$

$[\partial_\mu u = (\partial_\nu u_i, i=1, \dots, l; \nu=1, \dots, n)]$. 特別为了容易理解起見, 可以假設这个方程組是半綫性的, 即討論下面形式的方程組:

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\nu=1}^n a_{ij\nu}(x) \partial_\nu u_j + b_i(x, u) = 0 \quad (i=1, \dots, l). \quad (3.1)$$

設在空間 E^n 中給定一个曲面 $S(n-1$ 維), S 的方程是 $\phi(x)=0$, 并設 u 在 S 上取已給的值 $u=\psi(x)$. 在这种条件下求 (3.1) 的解的問題叫做一般 Cauchy 問題。要討論這個問題, 可以适当地变换独立变数, 譬如令 $\phi_1(x)=\phi(x)$, 并且另外适当地取 $n-1$ 个函数 $\phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$, 使得 $D(\phi_1, \dots, \phi_n)/D(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. 于是令

$$x'_\nu = \phi_\nu(x) \quad (\nu=1, \dots, n), \quad (3.2)$$

而把独立变数 x 变换成为独立变数 x' (在适当的范圍內), 并把 $\partial/\partial x'_\nu$ 記作 ∂'_ν . 由于

$$\partial_\mu u = \sum_{\nu=1}^n \partial'_\nu u \cdot \partial_\mu \phi_\nu,$$

(3.1) 式化成

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^l \sum_{\nu=1}^n \tilde{a}_{ij\nu}(x') \partial'_\nu u_j + \tilde{b}_i(x', u) &= 0 \quad (i=1, \dots, l), \\ \text{其中} \quad \tilde{a}_{ij\nu} &= \left(\sum_{\mu=1}^n a_{ij\mu} \cdot \partial_\mu \phi_\nu \right)_{x=\phi^{-1}(x')}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

由于在这里 S 的方程成为 $x'_1 = \phi(x) = 0$, 所以可以把 x'_1 看成是時間的变数而得到基准型的方程。但是这里的条件是 $\partial'_1 u$ 的系数 \tilde{a}_{i11} 所組成的行列式 $\neq 0$, 即 (此处 $\phi_1 = \phi$)

$$\left| \sum_{\mu=1}^n a_{i1\mu} \partial_\mu \phi \quad \begin{matrix} i=1, \dots, l \\ j=1, \dots, l \end{matrix} \right| \neq 0, \quad (3.4)$$

这条件是充分而必要的。

因此, 我們把关于 ξ_1, \dots, ξ_n 的 l 次齐次方程

$$\left| \sum_{\mu=1}^n a_{i1\mu}(x^0) \xi_\mu \quad \begin{matrix} i=1, \dots, l \\ j=1, \dots, l \end{matrix} \right| = 0 \quad (3.5)$$

叫做(3.1)在 $x=x^0$ 处的特征方程。对于一般的曲面 $S: \phi(x)=0$, 若是对它上面的点 x^0 , $\xi_\nu = \partial_\nu \phi(x^0)$ ($\nu=1, \dots, n$) 满足特征方程(3.5)的话, 那么我們就說 S 在 x^0 处是特征。(3.4)意味着 S 不是特征。所以如果 S 不是特征的话, 則在 S 上滿足 $u_i = \psi_i(x)$ (ψ_i 是已給的正則函数)的方程組(3.1)的解 $u_i(x)$ 存在而且唯一。用确切的語言来表达, 就得到了下面的定理。

定理 3.1 若是当 $x=x^0$ 时, $a_{ij\mu}(x)$, $\phi(x)$, $\psi_i(x)$ 正則, 当 $(x, u) = (x^0, u^0)$ 时, $b_i(x, u)$ 正則, 并且 $\phi(x^0) = 0$, $\psi_i(x^0) = u^0$. 此外 $\phi(x)=0$ 在 x^0 处不是特征, 那么方程組(3.1)就存在着唯一的解 $u_i = u_i(x)$, 这个解在 $x=x^0$ 处正則, 并且当 $\phi(x)=0$ 时, $u_i = \psi_i(x)$.

如果 S 上所有的点都是特征的话, 即

$$\text{当 } \phi(x)=0 \text{ 时, } \left| \sum_{\mu=1}^n a_{i1\mu} \partial_\mu \phi \quad \begin{matrix} i=1, \dots, l \\ j=1, \dots, l \end{matrix} \right| = 0 \quad (3.6)$$

的时候, 那么 $S: \phi(x)=0$ 就叫做(3.1)的特征面。

如果 S 是特征面的话, 利用(3.2)引入新的独立变数 x' , 在

(3.3)中关于 $\partial_1 u$ 系数的行列式满足

$$\left| \begin{matrix} \tilde{a}_{i,j} & i=1, \dots, l \\ j=1, \dots, l \end{matrix} \right|_{x_1=0} = 0,$$

因此存在着函数 $\lambda_i(x')$ ($i=1, 2, \dots, l$), 使得

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}(x'_2, \dots, x'_n) \neq \{0, \dots, 0\},$$

而且

$$\sum_{i=1}^l (\lambda_i \tilde{a}_{i,1})_{x_1=0} = 0.$$

对于这些函数 λ_i , 令

$$\sum_{i=1}^l (\lambda_i \tilde{a}_{i,j\mu})_{x_1=0} = \alpha_{j\mu}(x'_2, \dots, x'_n),$$

$$\sum_{i=1}^l (\lambda_i \tilde{b}_i)_{x_1=0} = \beta(x'_2, \dots, x'_n, u),$$

则由(3.3)式并用简写记号 $x' = (x'_2, \dots, x'_n)$, 就得到

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\mu=2}^n \alpha_{j\mu}(x') \partial_\mu u_j + \beta(x', u) = 0. \quad (3.7)$$

这就是说, “在特征面 S 上, 这 l 个函数 u_i 是 $n-1$ 个独立变数 x' 的函数, 这些函数应该满足一个偏微分方程 (3.7) (当 $n=2$ 时, 方程成为常微分方程)”, 故在特征面 S 上, 就不能够任意地给定作为初始值的函数。

例 1 $\partial_x u - \partial_y v = 0, \partial_x v + \partial_y u = 0.$

这个方程的特征方程是

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_2 \right| = \begin{vmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0.$$

所以在实数范围内并不存在特征面 $\phi(x, y) = 0$. 因此, 当函数 $\phi(x, y)$ 是满足 $\{\phi_x, \phi_y\}(x^0, y^0) \neq \{0, 0\}$, 及 $\phi(x^0, y^0) = 0$ 的实解析正则函数, 而在 (x^0, y^0) 的邻域可以给定任意的实解析正则函数作为 u, v 的初始值时, 这组联立方程在 (x^0, y^0) 的邻域就存在着唯一的一组正则解。

2. 高阶半线性方程的情形 现在研究一下 p 阶半线性方程

$$\sum_{1 \leq \nu \leq n} a_{\nu_1 \dots \nu_p}(x) \partial_{\nu_1 \dots \nu_p}^p u + f(x, u, \partial_x u, \dots) = 0 \quad (3.8)$$

(f 內包含最高到 n 的 $p-1$ 阶导函数)。对曲面 $S: \phi(x)=0$ 的初始值問題, 和前一节一样地引入函数 $\phi_1=\phi, \phi_2, \dots, \phi_n$, 并象 (3.2) 那样地作变数变换, 則有

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} u &= \sum_{\kappa=1}^n \partial'_{\kappa} u \cdot \partial_{x_1} \phi_{\kappa}, \\ \partial_{x_1}^2 u &= \sum_{\kappa, \lambda=1}^n \partial_{x_1}^2 u \cdot \partial_{x_1} \phi_{\kappa} \partial_{x_1} \phi_{\lambda} + \sum_{\kappa=1}^n \partial'_{\kappa} u \cdot \partial_{x_1}^2 \phi_{\kappa},\end{aligned}$$

一般地有

$$\partial_{x_1 \dots x_p}^p u = \sum_{1 \leq \kappa_1 \dots \kappa_p} \partial_{x_1 \dots x_p}^p u \cdot \partial_{x_1} \phi_{\kappa_1} \dots \partial_{x_p} \phi_{\kappa_p} + *** \quad (3.9)$$

(*** 中包含最高到 n 的 $p-1$ 阶导函数)。即变换后的方程仍是 p 阶的半綫性方程

$$\left. \begin{aligned} \sum_{1 \leq \kappa_1 \dots \kappa_p} \tilde{a}_{\kappa_1 \dots \kappa_p}(x') \partial_{x_1 \dots x_p}^p u + \tilde{f}(x', u, \partial_{x'} u, \dots) &= 0, \\ \tilde{a}_{\kappa_1 \dots \kappa_p} &= \sum_{1 \leq \nu_1 \dots \nu_p} a_{\nu_1 \dots \nu_p} \partial_{\nu_1} \phi_{\kappa_1} \dots \partial_{\nu_p} \phi_{\kappa_p} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

(其中 \tilde{f} 包含最高到 $p-1$ 阶导函数)。这里 $\partial_{x_1}^p$ 的系数是

$$\tilde{a}_{1 \times (p)} = \sum_{1 \leq \nu_1 \dots \nu_p} a_{\nu_1 \dots \nu_p} \partial_{\nu_1} \phi \dots \partial_{\nu_p} \phi. \quad (3.11)$$

因此, 如果 (3.11) $\neq 0$, 則以 x_1' 作为時間变数, 这个方程就化成了基准型的 p 阶半綫性偏微分方程。

現在对于任意的 ξ_1, \dots, ξ_n , 我們把下列的 p 次齐次方程

$$\sum_{1 \leq \nu_1 \dots \nu_p} a_{\nu_1 \dots \nu_p}(x^0) \xi_{\nu_1} \dots \xi_{\nu_p} = 0 \quad (3.12)$$

叫做方程 (3.8) 在点 x^0 处的特征方程。如果曲面 $S: \phi(x)=0$ 在 x^0 处的 $\xi = \partial_{x'} \phi(x^0)$ 滿足 (3.12), 那么就說 S 在 x^0 处是特征。于是有下面的定理。

定理 3.2 設 $\phi(x)=0$ 在 x^0 处不是特征, 对于初始条件 $x_1'=0, u=\psi_0(x'), \partial_i' u=\psi_i(x') (i=1, \dots, p-1)$, 方程 (3.8) 当 $x=x^0$ 时存在着唯一的正則解。在这里还要假定一切已給的函数都是解

析而且正則的, 并且 ψ_i 連同它的由一阶到 $p-i$ 阶导函数的值, 都包含在正則的 \tilde{f} 的变数域之內。

此外, 若是所有 S 的点都是特征的話, 那么 S 就叫做 (3.8) 的 **特征面**。这时在 S 上有 $x'_1=0$, 所以 (3.10) 中只留下了 $n-1$ 个独立变数 x'_2, \dots, x'_n , 并且这 p 个函数 $\psi_0, \dots, \psi_{p-1}$ 应该滿足一个偏微分方程 (当 $n=2$ 时为常微分方程)。这个方程对于 ψ_i 的最高阶数为 $p-i$ 。

最后我們可以对联立高阶半綫性方程組 (u_i 的阶数为 $p(i)$):

$$\sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq \nu \leq n} a_{ij, \nu_1 \dots \nu_{p(i)}}(x) \partial_{\nu_1 \dots \nu_{p(i)}}^{p(i)} u_j + f_i(x, u, \partial_x u, \dots) = 0 \quad (i=1, \dots, l) \quad (3.13)$$

进行同样的討論, 这时在点 x^0 处的特征方程是 $p(1) + \dots + p(l)$ 次的齐次方程

$$\left| \sum_{1 \leq \nu \leq n} a_{ij, \nu_1 \dots \nu_{p(i)}}(x^0) \xi_1 \dots \xi_{p(i)} \quad \begin{matrix} i+1, \dots, l \\ j=1, \dots, l \end{matrix} \right| = 0. \quad (3.14)$$

例 2 $\partial_x^2 u - \sum_{\mu=1}^m \partial_{y_\mu}^2 u = 0.$

这个方程的特征面的方程是

$$(\partial_x \phi)^2 - \sum_{\mu=1}^m (\partial_{y_\mu} \phi)^2 = 0.$$

若是令 $\phi = x - \sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu y_\mu$, 那么平面 $\phi=0$ 成特征的条件显然是 $\sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu^2 - 1 = 0$. 因此, 假設 $\sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu^2 \neq 1$, 那么在这样的 $S: \phi=0$ 上, 可以給定任意的解析而正則的函数, 作为 u 以及它沿着 S 的法綫方向的导数 $\partial_n u$ 的值。于是在 S 的邻域就存在着方程的唯一的解 $u = u(x, y)$ 。

习题 1 对一阶的单独半綫性方程

$$\sum_{\mu=1}^n a_\mu(x) \partial_{y_\mu} u + b(x, u) = 0,$$

求它的特征面方程。

习题 2 求联立一阶方程組 (x, y 是独立变数)

$$\partial_x u_i - \sum_{j=1}^l a_{ij}(x, y) \partial_y u_j = f_i(x, y, u) \quad (i=1, \dots, l)$$

的特征方程。

习题3 如果

$$\phi \equiv x^2 - \sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu} y_{\mu}^2 - \beta = 0$$

是例2中微分方程的特征面,求常数 α_{μ}, β 。

注意 关于非綫性偏微分方程的特征方程可以参看 Petrovski: Lectures on partial differential equations, pp. 32~34. 不过在那里曾提到了非綫性方程“是利用解来定义特征方程的”。事实上,关于解的存在的假設是不必要的,我們只要利用方程中所出現的未知函数以及它的微分系数所取的“值”就能定义特征方程。

§4 Holmgren 定理

1. Holmgren 定理 我們在 §2 中已講过,对于解析而正則的基准型微分方程,初始值(正則)問題存在着一組正則解。但是对于同样的初始值是否能有其他的解(譬如非正則的)呢? 关于这个問題, Holmgren 在 1901 年就系数是解析而正則的联立一阶“綫性”方程組(基准型)的情形,証明了一般初始值問題的解的唯一性。

定理 4.1 設在綫性基准型偏微分方程組

$$\begin{aligned} \partial_x u_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu}(x, y) \partial_{y_{\mu}} u_j + \sum_{j=1}^l b_{ij}(x, y) u_j + c_i(x, y) \\ (\partial_x = \partial_{y_{\mu}}) \quad (i=1, \dots, l) \end{aligned} \quad (4.1)$$

中, $a_{ij\mu}, b_{ij}$ 对 (x^0, y^0) 是解析而正則的函数。这时,在 $(x, y) = (x^0, y^0)$ 的适当的邻域,对于同一个初始条件 $u_i(x^0, y) = \phi_i(y)$ (ϕ_i 是連續可微的),方程 (4.1) 有一組唯一的連續可微的解。

証明 假設对于同一个初始条件, 方程組 (4.1) 存在着兩組解,令它們的差是 v_i ($i=1, \dots, l$), 則 v_i 滿足方程組

$$\partial_x v_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu} \partial_{y_{\mu}} v_j + \sum_{j=1}^l b_{ij} v_j \quad (i=1, \dots, l), \quad (4.2)$$

和初始值条件 $v_i(x^0, y) = 0$. 現在我們來證明, 在 (x^0, y^0) 的邻域必定有 $v_i \equiv 0$. 不失問題的一般性可以令 $(x^0, y^0) = (0, 0)$. 引入变数变换

$$x' = x + \sum_{\mu=1}^m y_{\mu}^2, \quad y'_{\mu} = y_{\mu} \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

把独立变数变成 x', y' , 于是

$$\partial_x v_i = \partial'_{x'} v_i, \quad \partial_{y_{\mu}} v_i = \partial'_{y'_{\mu}} v_i + 2y'_{\mu} \partial'_{x'} v_i.$$

从而(4.2)就成为

$$\sum_{j=1}^l \left(\delta_{ij} - \sum_{\mu=1}^m 2y'_{\mu} a'_{ij\mu} \right) \partial'_{x'} v_j = \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m a'_{ij\mu} \partial'_{y'_{\mu}} v_j + \sum_{j=1}^l b'_{ij} v_j \quad (i=1, \dots, l). \quad (4.3)$$

这里

$$a'_{ij\mu} = a_{ij\mu}(x' - \sum y_{\mu}^2, y'), \quad b'_{ij} = b_{ij}(x' - \sum y_{\mu}^2, y').$$

当 $|y'|$ 适当小时, 由于

$$\left| \delta_{ij} - \sum_{\mu=1}^m 2y'_{\mu} a'_{ij\mu} \right|_{\substack{i,j=1,\dots,l \\ \mu=1,\dots,m}} \neq 0,$$

所以由(4.3)中解出 $\partial'_{x'} v_i$, 就得到

$$\partial'_{x'} v_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m \tilde{a}_{ij\mu} \partial'_{y'_{\mu}} v_j + \sum_{j=1}^l \tilde{b}_{ij} v_j \quad (i=1, \dots, l). \quad (4.4)$$

这里 $\tilde{a}_{ij\mu}, \tilde{b}_{ij}$ 在 $(x', y') = (0, 0)$ 处正则。又初始条件是

$$x' = \sum_{\mu=1}^m y_{\mu}^2 \text{ 时, } v_i = 0.$$

下面我們指出, 在 $(0, 0)$ 适当的邻域, 当 $x' > \sum_{\mu=1}^m y_{\mu}^2$ 时, $v_i = 0$.

首先我們定义两个微分运算符 F_i 及 F_i^* :

$$F_i[v] \equiv \partial'_{x'} v_i - \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m \tilde{a}_{ij\mu} \partial'_{y'_{\mu}} v_j - \sum_{j=1}^l \tilde{b}_{ij} v_j,$$

$$F_i^*[w] \equiv -\partial'_{x'} w_i + \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m \partial'_{y'_{\mu}} (\tilde{a}_{ij\mu} w_j) - \sum_{j=1}^l \tilde{b}_{ij} w_j.$$

对于任意連續可微的函数 v, w , 就有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l (w_i F_i[v] - v_i F_i^*[w]) \\ &= \sum_{i=1}^l \left\{ \partial'_x (v_i w_i) - \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m \partial'_\mu (\tilde{a}_{ij\mu} v_j w_i) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

現在令 K 代表 E^{m+1} 空間中的曲面 $x' = \sum_{\mu=1}^m y_\mu'^2$ (m 維); L_a 代

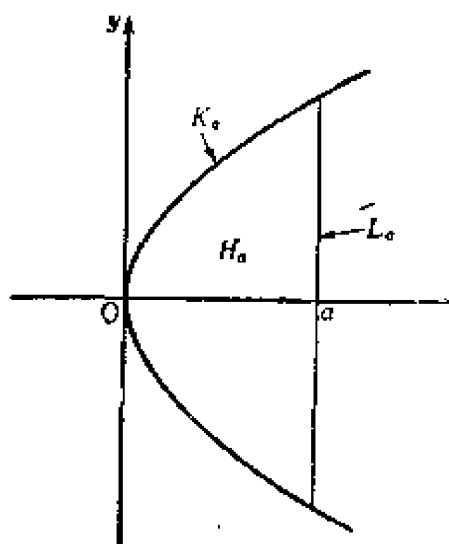


图 4.1

表平面 $x' = a$ (>0) (m 維), 并且令 K_a 是 K 上满足 $0 \leq x' \leq a$ 的部分。再令 K_a 与 L_a 所界的空間为 H_a ($m+1$ 維)。(适当地选取 $a > 0$ 的話)那么在 K_a 上就有 $v_i = 0$, 而在 H_a 內由于 (4.4) 而有 $F_i[v] = 0$ 。現在設 w_i 是在 $H_a + K_a + L_a$ 內連續可微的函数, 并且滿足

$$F_i^*[w] = 0, \quad (4.6)$$

則由于 (4.5), 就有

$$\begin{aligned} & \iint_{H_a} \sum_{i=1}^l (w_i F_i[v] - v_i F_i^*[w]) dx' d^m y' = 0 \\ &= \iint_{H_a} \partial'_x \left(\sum_{i=1}^l v_i w_i \right) dx' d^m y' - \sum_{i,j=1}^l \sum_{\mu=1}^m \iint_{H_a} \partial'_\mu (\tilde{a}_{ij\mu} v_j w_i) dx' d^m y' \\ &= \int_{L_a} \left(\sum_{i=1}^l v_i w_i \right) d^m y' - \int_{K_a} \left(\sum_{i=1}^l v_i w_i \right) d^m y' \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^l \sum_{\mu=1}^m \int_{K_a} (\tilde{a}_{ij\mu} v_j w_i) dx' d^{m-1} y'_{(\mu)}, \\ &\quad (d^{m-1} y'_{(\mu)} = dy'_1 \cdots dy'_{\mu-1} dy'_{\mu+1} \cdots dy'_m), \end{aligned}$$

再由于在 K_a 上有 $v_i = 0$, 所以

$$\int_{L_a} \left(\sum_{i=1}^l v_i w_i \right) d^m y' = 0. \quad (4.7)$$

但是根据 § 2, 若 $\phi_i(y')$ 是任意的有理函数, 則方程 (4.6) 有解 w_i , 使得在 $x' = a$ 处, $w_i = \phi_i(y')$ 。这个解的存在域 (当 a 适当小的

时)与 u 及 $\phi_i(y')$ 的选择无关(見 § 2 注意 3)。因此 (4.6) 在全部 H_i 中成立, 并且在 (4.7) 中令 $w_i = \phi_i(y')$ 也成立。可是 L_a 被 K 所截的部分是有界的閉集, 所以据 Weierstrass 定理能够选择一个有理函数列 $\{\phi_i(y')\}$, 使它們一致地收敛于函数 v_i 。作了这样的极限过程以后, 就得到

$$\int_{L_a} \left(\sum_{i=1}^l v_i^2 \right) d^m y' = 0.$$

所以在 L_a 上有 $v_i = 0$ 。但是这里的 $a > 0$ 在适当的范围内是可以任意选择的, 从而在 $(x', y') = (0, 0)$ 适当的邻域, 当 $x' > \sum_{\mu=1}^m y'_\mu{}^2$ 时有 $v_i = 0$ 。如果把独立变数由 (x', y') 变回到 (x, y) , 那么就是說, 在 $(x, y) = (0, 0)$ 适当的邻域, 当 $x > 0$ 时, 有 $v_i = 0$ 。自然可以用 $-x$ 代替 x , 于是对 $x < 0$ 同样得到了 $v_i = 0$ 。 証毕

注意 在定理 4.1 的証明中曾用到了 F_i^* 的系数的解析正則性, 即 $a_{ij\mu}$ 及 b_{ij} 都是正則函数。若是不假設系数的正則性, 那么就不能够得到与方程类型无关的結果。对于二个独立变数 ($m=1$) 的方程, Carleman 在 1939 年曾得到了下面的結果。

設在 $0 \leq x < \alpha$, $|y| < \beta$ 时, a_{ij} (因为这里 $\mu=1$, 所以 μ 略去不写) 二次連續可微, b_{ij} 連續 (c_i 也連續), 此外設矩陣 (a_{ij}) 沒有相同的本征值, 即 λ 的 l 次方程

$$\left| a_{ij} - \delta_{ij}\lambda, \quad \begin{matrix} i,j=1,\dots,l \\ j=1,\dots,l \end{matrix} \right| = 0 \quad (4.8)$$

沒有相等的根 (对于不是实根的情形也一样), 那么对于同一个初始条件 $u_i(0, y) = \phi_i(y)$, 方程在 $(0, 0)$ 适当的邻域, 当 $0 \leq x$ 时, 只有唯一的一组解。参看 T. Carleman: Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendentes. Arkiv för Måth. Ast. och Fysik 26.

有許多的學者努力于把 Carleman 定理一般化的工作, 主要是要消除对于 (4.8) 中根的限制条件, 但是都沒有收到成果。最近 Plis 在 1954 年曾指出, 若是不对 (4.8) 的根附加条件, 那么能作成一個例子, 这时虽設 a_{ij} 无限次連續可微, $b_{ij} \equiv 0$ 而 u_i 也无限次連續可微, 并且 u_i 与它的任意阶导函数在

$x=0$ 处都等于 0, 但是在 $x=0$ 的邻域 u_i 仍能够不恒等于零。这个例子是值得引起我們注意的。見 Plis: The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations, Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sci. 2(1954), pp. 55~57.

2. 一般的 Cauchy 問題 前节对基准型方程叙述了 Holmgren 定理。利用 §3 中的方法, 可以把它推广到一般 Cauchy 問題的情形。現在考虑以 $x=(x_1, \dots, x_n)$ 为独立变数的联立一阶綫性方程組

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{ij\nu}(x) \partial_\nu u_j + \sum_{j=1}^l b_{ij}(x) u_j + c_i(x) = 0 \quad (i=1, \dots, l), \quad (4.9)$$

并設系数 $a_{ij\nu}$, b_{ij} 在 $x=x^0$ 处都是解析而正則的。若在 E^n 中有曲面 $S: \phi(x)=0$, 它是非特征的 [即(3.4)成立], $\phi(x^0)=0$, 而且 ϕ 在 $x=x^0$ 是正則的話, 那么适当選擇在 $x=x^0$ 处正則的函数 ϕ_2, \dots, ϕ_n , 可作(3.2)的变数变换。变换的結果, 就能得到在 $x'=x'^0$ 的邻域与(4.9)同等的基准型方程組, 并且它的系数在 $x'=x'^0$ 处是正則函数。于是根据 Holmgren 定理就能知道, 方程組(4.9)存在唯一的一組解, 它在 $x=x^0$ 的邻域連續可微, 并且在 S 上取已給的值作为初始值。

特别是, 当特征方程(3.5)不具有实向量 ξ ($\xi \neq 0$) 的解的时候, 我們就称方程(4.9) [或是(3.1)] 在 $x=x^0$ 处为橢圓型的。§3 例 1 的方程在全平面中是橢圓型的。設方程(4.9)的系数 $a_{ij\nu}$ 及 b_{ij} 在空間 E^n 的某一个开区域 D 中是(实)解析正則的, 并且对于所有 D 的点, (4.9)是橢圓型的。这时, 若(4.9)的两組在 D 中連續可微的解在 D 内一点 $x=a$ 的邻域(无论这个邻域多么小)一致, 那么这两組解就在全部 D 中一致。要証明这个事实, 只要証明 $c_i(x) \equiv 0$ 的方程(4.9)在 $x=a$ 的邻域的解 $u=u(x)=0$ 必在整个 D 中等于零即可。現在用反証法, 假設在 D 中的某一部分 $u(x) \neq 0$, 因为根据假設, 在 D 内使得 $u(x) \equiv 0$ 的部分具有内点, 所以

可以在 D 内适当地作成一个球 $\phi \equiv \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - a'_\nu)^2 - r^2 \leq 0$, 使得当 $\phi = 0$ 时, $u(x) = 0$, 并且对于球面 $\phi = 0$ 上有一点 $x = x^0$, 在这个点的无论多小的邻域中一定存在着这样的点, 使得 $u(x) \neq 0$. 但是由于 $\phi(x)$ 在 $x = x^0$ 处正则而且不是特征的, 所以满足“当 $\phi = 0$ 时, $u(x) = 0$ ”的解 $u(x)$ 在 $x = x^0$ 的邻域中一定等于零。因此若在 D 中假设存在着 $u(x) \neq 0$ 的部分, 就能得出矛盾。所以在整个 D 中 $u(x) = 0$ 。

这里所讲的椭圆型定义, 以及解的唯一性定理, 可以推广到高阶线性微分方程的情形。我们可以预测, 当椭圆型线性偏微分方程的系数不是解析而正则时, 唯一性定理也能成立。可是对最一般的情形现在还没有能够得到证明。

由于高阶的方程利用独立变数的变换 (3.2) 可以转化成为联立一阶方程组 (2.10), 所以对于高阶偏微分方程的一般 Cauchy 问题 (ϕ 正则, $S: \phi = 0$ 非特征), Holmgren 定理仍然成立。我们现在举波动方程为例

$$\partial_x^2 u - \sum_{\mu=1}^m \partial_{y_\mu}^2 u = 0. \quad (4.10)$$

在空间 E^{m+1} 中以 $(x, y) = (a, 0)$ 为顶点的锥面

$$K_a: (x-a)^2 - \sum_{\mu=1}^m y_\mu^2 = 0 \quad (a > 0)$$

是方程 (4.10) 的特征面。设平面 $x=0$ 被这个锥面所截的部分 $(x=0, \sum_{\mu=1}^m y_\mu^2 \leq a^2)$ 为 S_a , 并令界在 S_a 与 K_a 之间的空间部分为

$$H_a: 0 < x < a, \sum_{\mu=1}^m y_\mu^2 < (x-a)^2.$$

现在设在 S_a 上给定了 u 及 u_x 的初始值。我们来证明, 方程 (4.10) 的二次连续可微的解 u 在 H_a 中是唯一决定的。为了这个目的, 只要指出, 在 S_a 上 $u=0, u_x=0$ 的解, 在 H_a 中 $u \equiv 0$ 即可。首先

把 H_a 縮小一些使之成为 $H_{a'}$ ($0 < a' < a$), 对于任意的 λ , $0 < \lambda < 1$, 考虑曲面

$$\phi_\lambda \equiv \lambda \left\{ (x-a')^2 - \sum_{n=1}^m y_n^2 \right\} - (1-\lambda)x = 0.$$

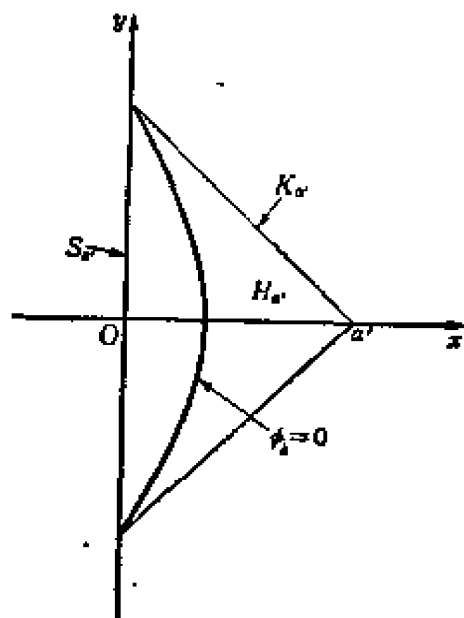


图 4.2

显然 $\phi_\lambda = 0$ ($0 < \lambda < 1$) 不会有特征点。当 λ 由 0 变到 1 时, 曲面 $\phi_\lambda = 0$ 将通过 $H_{a'}$ 中的每一个点。当 $\lambda = 0$ 时, 曲面 $\phi_\lambda = 0$ 与平面 $x = 0$ 一致。但是根据 Holmgren 定理, (4.10) 在 $S_{a'}$ 上满足 $u = 0$, $u_x = 0$ 的解, 必然在 $S_{a'}$ 的适当邻域中满足 $u \equiv 0$ 。也就是说, 当 $\lambda (> 0)$ 充分小的时候, 在 $\phi_\lambda = 0$ 的落在 $H_{a'}$ 内的部分上, u 与它的导函数都等于零。假若现在 u 不在整个 $H_{a'}$ 内都满足 $u = 0$, 那么一定存在着一个

适当的数 $\bar{\lambda}$, 满足 $0 < \bar{\lambda} < 1$, 使得对于所有满足 $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ 的 λ , 在 $\phi_\lambda = 0$ 的落在 $H_{a'}$ 内的部分上, u 及它的导函数都等于零, 但是对 $\lambda > \bar{\lambda}$ (无论 λ 距 $\bar{\lambda}$ 多近) 结果就不成立。现在因为在 $\phi_\lambda = 0$ 的落在 $H_{a'}$ 内的部分上, u 及它的导函数都等于零, 所以根据 Holmgren 定理, 对于满足 $\bar{\lambda} - \lambda < \delta$ (δ 相当的小) 的 λ , 在 $\phi_\lambda = 0$ 的落在 $H_{a'}$ 的部分上, u 与它的导函数都等于零, 这样就引出了矛盾。故在整个 $H_{a'}$ 中 $u = 0$ 。由于 a' 收敛于 a , 所以在整个 H_a 中 $u = 0$ 。这就是说在 H_a 内, u 的值是由它在 S_a^* 上的初始值 u 及 u_x 所决定的。因此在这种意义下, 我们把 H_a 叫做 S_a 的决定区域。

习题 对于 $m=1$ 的情形, 具体验算波动方程对于 $|y| < a$ 的决定区域是 $y^2 < (x-a)^2$, $|x| < a$ [参照 (2.5)]。

第2章 一阶拟綫性偏微分方程

本章叙述一些单独的一阶拟綫性偏微分方程的一般性質以及求解的方法。在本章中,如不特別加以說明,我們假設所考虑的函数都是在某一个适当范围(即在一个維数等于独立变数个数的空間的开区域中)內連續可微并仅取实数值的函数。

§5 特征曲綫

首先为了使問題簡單化,我們討論两个独立变数 x, y 的情形。設所給的方程是

$$A(x, y, u)\partial_x u + B(x, y, u)\partial_y u = C(x, y, u). \quad (5.1)$$

現在把 x, y, u 当作直角坐标来考虑,則 (5.1) 的解 $u = u(x, y)$ 是某一个曲面上的点的集合,如令 (x, y, u) 处曲面的法綫向量为 n (适当地取它的大小),則

$$n = (\partial_x u, \partial_y u, -1).$$

又在点 (x, y, u) 处引入向量 m (Monge 向量), 它的定义是

$$m = \{A(x, y, u), B(x, y, u), C(x, y, u)\}.$$

根据 (5.1), m 与 n 的数量积等于 0, 即

$$m \cdot n = A\partial_x u + B\partial_y u - C = 0.$$

这就是說, m 处处正交于曲面 $u = u(x, y)$ 的法綫 n , 即 m 与曲面 $u = u(x, y)$ 相切。于是得到下面的結果。

定理 5.1 函数 $u = u(x, y)$ 是方程 (5.1) 的解的充分必要条件是, 在 $u = u(x, y)$ 上的每个点 (x, y, u) 处, Monge 向量 m 与曲面 $u = u(x, y)$ 相切。

下面討論多个独立变数的情形, 这里取 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 此外,

設所給的方程为

$$\sum_{\nu=1}^n A_{\nu}(x, u) \partial_{\nu} u = F(x, u). \quad (5.2)$$

这时, 在 E^{n+1} 空間的 Monge 向量定义为

$$m = \{A_1(x, u), \dots, A_n(x, u), F(x, u)\}, \quad (5.3)$$

和前面一样有如下的結果:

定理 5.2 函数 $u=u(x)$ 是方程 (5.2) 的解的充分必要条件是, 在 $u=u(x)$ 上的每个点 (x, u) 处, Monge 向量 m 与 $u=u(x)$ 相切。

因此我們要研究在 E^{n+1} 中 Monge 向量所作成的向量場, 它显然满足下列的常微分方程組

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{\nu} &= A_{\nu}(x_1, \dots, x_n, u) \quad (\nu=1, \dots, n), \\ \frac{d}{dt} u &= F(x_1, \dots, x_n, u). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

这組方程叫做方程 (5.2) 的特征微分方程組。它的解是曲綫 $(x, u) = \{x, u\}(t)$ (t 是曲綫的参变数), 这种曲綫叫做方程 (5.2) 的特征曲綫。于是得到了下面的定理。

定理 5.3 $u=u(x)$ 是 (5.2) 的解的充分必要条件是, 经过 $u=u(x)$ 每一个点的特征曲綫一定落在曲面 $u=u(x)$ 上。

証明 首先証明充分性。

显然在曲面 $u=u(x)$ 上的每个点处, Monge 向量与曲面相切 (通过直接代入方程即得), 但是 Monge 向量是特征曲綫的切綫, 故充分性成立。

为了証明必要性, 設 $u=u_0(x)$ 是方程 (5.2) 的解, (ξ, ζ) 是曲面上的一点, 即 $\zeta = u_0(\xi)$ 。现在考虑 x 的常微分方程

$$\frac{d}{dt} x_{\nu} = A_{\nu}(x, u_0(x)) \quad (\nu=1, \dots, n). \quad (5.5)$$

設这組方程满足条件“当 $t=0$ 时, $x=\xi$ ”的解是 $x=x(t)$, 并令

$$u_0(x(t)) = u(t), \quad (5.6)$$

由于 $\{x, u\}(0) = \{\xi, u_0(\xi)\} = \{\xi, \zeta\}$, 并且

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= \sum_{v=1}^n (\partial_v u_0)_{x=x(t)} \frac{dx_v}{dt} \\ &= \sum_{v=1}^n \{\partial_v u_0 \cdot A_v(x, u_0(x))\}_{x=x(t)} \\ &= \{F(x, u_0(x))\}_{x=x(t)} \quad [\text{因为 } u_0(x) \text{ 是 (5.2) 的解}], \end{aligned}$$

所以由 (5.5) 及 (5.6) 就有

$$\frac{d}{dt} \{x, u\}(t) = \{A_1(x, u), \dots, A_n(x, u), F(x, u)\}(t),$$

这就是说, 曲面 $u = u_0(x)$ 包含着通过它上面的点 (ξ, ζ) 的特征曲线 $(x, u) = \{x, u\}(t)$, 这条曲线显然是唯一的。 証毕

例 $\sum_{v=1}^n x_v \partial_v u = k u$ (k 常数).

这个方程的特征微分方程是

$$\frac{d}{dt} x_v = x_v (v=1, \dots, n), \quad \frac{d}{dt} u = k u.$$

所以当 $t=0$ 时, $(x, u) = (\xi, \zeta)$ 的解是

$$x_v = \xi_v e^t, \quad u = \zeta e^{kt}.$$

设 $e^t = \lambda$, 则 λ 是任意的大于零的变量。现在把 (ξ, ζ) 考虑为 $u = u(x)$ 上面的任意的点, 于是 $(\lambda \xi, \lambda^k \zeta)$, $\lambda > 0$ 也是 $u = u(x)$ 上的点。这就是说, u 必需满足条件: $u(\lambda \xi_1, \dots, \lambda \xi_n) = \lambda^k u(\xi_1, \dots, \xi_n)$. 因为 ξ 是任意的, 可取为 x , 并由 $\lambda > 0$, 上面的条件就是

$$u(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k u(x_1, \dots, x_n),$$

即 $u(x)$ 是 k 次的齐次函数。

注意 如果把方程 (5.2) 的两边同乘以一个函数 $M(x, u) \neq 0$, 则得到一个与 (5.2) 等价的方程。因为 Monge 向量乘以数量 $M(x, u) \neq 0$ 后方向不变, 并且特征曲线的参变数可允许作任意的变换, 为了反映这个性质, 我们可以更好地采用下面不含参变数的对称形式来代替特征微分方程 (5.4), 即

$$\frac{dx_1}{A_1(x, u)} = \dots = \frac{dx_n}{A_n(x, u)} = \frac{du}{F(x, u)}.$$

满足 $\{A_1, \dots, A_n\}(x^0, u^0) \neq \{0, \dots, 0\}$ 这样的点 (x^0, u^0) 叫做方程 (5.2)

的正常点。如果 (x^0, u^0) 不是 (5.2) 的正常点, 那么 $\{A_1, \dots, A_n\} \{x^0, u^0\} = \{0, \dots, 0\}$. 这个时候, 如果 x_0, u_0 再满足 $F(x^0, u^0) = 0$, 则通过点 (x^0, u^0) 的特征曲线 $(x, u) = \{x, u\}(t)$ 就蜕化成为这点 (x^0, u^0) 本身。如果 $F(x^0, u^0) \neq 0$, 则通过点 (x^0, u^0) 的特征曲线的切线 (Monge 向量) 平行于 u 轴 (即垂直于 x 平面), 这时含有点 (x^0, u^0) 的连续可微的解的曲面 $u = u(x)$ 是不存在的。

§6 Cauchy 存在定理

根据定理 5.3, 方程 (5.2) 的解的曲面 (n 维) 是由无限多特征曲线组成的。但是每一特征曲线都是一维图形 (一般地说), 而解的曲面 $u = u(x)$ 是 n 维的图形, 所以通过在曲面 $u = u(x)$ 上作为 (适当的) 截口的 $n-1$ 维流形 (当 $n=2$ 时为曲线) 上每点的特征曲线的全体组成了曲面 $u = u(x)$. 就是说, 我们认为方程 (5.2) 的解, 可以把要求它包含一个 $n-1$ 维的初始流形 (下面 s 表示参变数)

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= \alpha_\nu(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (\nu = 1, \dots, n), \\ u &= \beta(s_1, \dots, s_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

作为条件来决定。用确切的语言来叙述, 且用 $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$ 的写法, 就有

定理 6.1 设初始流形 (6.1) 满足条件

$$\left| A_i(\alpha(s), \beta(s)) - \partial_{s_i} \alpha_i(s) \begin{vmatrix} 1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{vmatrix} \right| \neq 0, \quad (6.2)$$

而 (x^0, u^0) 是 (6.1) 上的任意的点, 则在 $x = x^0$ 的适当的邻域中, 存在着方程 (5.2) 的唯一的一组解, 它满足条件: 当 $x = \alpha(s)$ 时, $u = \beta(s)$.

证明 设当 $t=0$ 时, 满足条件 $(x, u) = \{\alpha, \beta\}(s)$ 的方程 (5.4) 的解 (特征曲线) 是

$$(x, u) = \{X, U\}(t, s), \quad (6.3)$$

则

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(t, s_1, \dots, s_{n-1})_{t=0}} = \left| A_i(\alpha, \beta) \quad \partial_{\mu} \alpha_i \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \neq 0, \quad [(6.2)]$$

这个式子就意味着 $x = X(t, s)$ 这个函数关系把 $x = x^0$ 的邻域与 $(t, s) = (0, s^0)$ 的邻域作成了 1 对 1 的对应。因此可以认为 t, s 是 x 的函数 (連續可微的), 即 $(t, s) = \{t, s\}(x)$ 。于是令

$$U(t(x), s(x)) = u(x),$$

由于 $u = u(x)$ 是由特征曲綫的集合 (6.3) 所构成的曲面, 所以它是 (5.2) 的解。又因为在 $x = x^0$ 的邻域中, $x = \alpha(s)$ 恰好对应着 $t = 0$, 所以当 $x = \alpha(s)$ 时, $u = \beta(s)$ 。

再者 (5.2) 的解的曲面 $u = u(x)$ 非包含通过 (6.1) 各点的特征曲綫不可, 所以由 (6.3) 所构成的曲面必定是解的曲面。 証毕

例 1 $xu_x + yu_y = ku$ 。

試求这个方程包含初始曲綫 $(x, y, u) = \{\cos s, \sin s, \zeta(s)\}$ 的解。因为通过初始曲綫各点的特征曲綫是

$$(x, y, u) = \{\cos s \cdot e^t, \sin s \cdot e^t, \zeta(s) e^{kt}\},$$

所以能够得到关系 $s = \tan^{-1}(y/x)$, $t = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ 。因此

$$u = \zeta(\tan^{-1}(y/x)) \cdot (x^2 + y^2)^{k/2}.$$

在这个例题中, 条件 (6.2) 是 $\begin{vmatrix} A_1 & \alpha'_1 \\ A_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{vmatrix} = 1$, 所以总是成立的。

例 2 $uu_x + u_y = 1$ 。

設初始曲綫是 $(r, y, u) = \{s^2, 2s, c+s\}$, 特征微分方程就是 $x' = u$, $y' = 1$, $u' = 1$, 所以通过初始曲綫各点的特征曲綫是

$$x = s^2 + (c+s)t + t^2/2, \quad y = 2s + t, \quad u = c + s + t.$$

把 s, t 解成 x, y 的函数, 并代到最后一式, 則有

$$u = \frac{y}{2} - c \pm \sqrt{x + c^2 - y^2/4}.$$

現在条件 (6.2) 是 $\begin{vmatrix} c+s & 2s \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2c$, 所以当 $c \neq 0$ 时, 条件 (6.2) 成立; 当

$c \neq 0$ 时,不成立。这个时候由于 $(x, y) = (s^2, 2s)$, 所以有 $x - y^2/4 = 0$, 于是解的曲面到平面 (x, y) 的正射影, 仅仅在这条曲线 $x - y^2/4 = 0$ 的一侧是实的。而在这条曲线上, $u_x(u_y)$ 的值成为 ∞ 。

注意 1 在定理 6.1 中只要假设函数 $A_v(x, u), F(x, u), \alpha_v(s), \beta(s)$ 都一次连续可微就够了。此外, 若是这些函数都 k 次连续可微, 那么解 $u = u(x)$ 也就 k 次连续可微。再如果这些函数都是解析正则的话, 那么解 $u = u(x)$ 也是解析正则的。

注意 2 空间 E^{n+1} 中的特征曲线 $(x, u) = \{x, u\}(t)$ 到 x 空间 E^n 的正射影 $x = x(t)$ 叫做基础特征曲线。条件 (6.2) 的几何意义就是说: 基础特征曲线不切于作为初始的基础流形 $x = \alpha(s)$ 。

其次, 如果 (6.2) 成立的话, 则 $\{A_1, \dots, A_n\}(\alpha(s), \beta(s)) \neq \{0, \dots, 0\}$, 所以可认为初始流形都是由正常点所组成的。相反, 若是 (x^0, u^0) 是正常点, 我们在 $x = x^0$ 的适当的邻域, 可取一个包含 (x^0, u^0) 而 (6.2) 成立的初始流形。譬如假设 $A_1(x^0, u^0) \neq 0$, 可以取

$$\alpha_1(s) \equiv x_1^0, \quad \alpha_2(s) \equiv s_1, \quad \dots, \quad \alpha_n(s) \equiv s_{n-1},$$

$\beta(s)$ 可以取满足条件 $\beta(s^0) = u^0$ 的任意函数。这样 (6.2) 就在 $s = (x_2^0, \dots, x_n^0) = s^0$ 的适当的邻域成立。在这种情况下, 初始条件成为

$$x_1 = x_1^0 \text{ 时 } u = \beta(x_2, \dots, x_n).$$

另外, 因为 $A_1 \neq 0$, 所以可以把 s_1 认为是时间变数, 而把方程化成为基准型。

习题 1 设条件 (6.2) 成立, 则

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_\mu \alpha_i & i=1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{pmatrix} = n-1.$$

于是在 $x^0 = \alpha(s^0)$ 的邻域, 不失去一般性, 可以假设

$$\begin{vmatrix} \partial_\mu \alpha_i & i=2, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

这个时候, 如令

$$x_1 = x'_1 + \alpha_1(x'_2, \dots, x'_n), \quad x_v = \alpha_v(x_2, \dots, x'_n) \quad (v=2, \dots, n),$$

把独立变数 x 换成独立变数 x' , 于是方程 (5.2) 就等价于一个以 x'_1 为时间变数的基准型方程, 这时的初始条件是

$$\text{当 } x'_1 = 0 \text{ 时, } u = \beta(x'_2, \dots, x'_n).$$

(若解本题有困难的话, 可先解下面的习题。)

习题 2 对于下列的微分方程求包含有初始曲线的解。

$$(a) \quad xu_x + yu_y = 2xy,$$

初始曲线 $(x, y, u) = (\cos s, \sin s, \sin 2s)$.

$$(b) \quad uu_x + u_y = u^2,$$

初始曲线 $(x, y, u) = (0, s, a/s)$.

§ 7 变成齐次线性方程的变换

1. 一阶齐次线性微分方程

现在考虑方程

$$\sum_{\nu=1}^n A_{\nu}(x) \partial_{\nu} u = 0. \quad (7.1)$$

这种方程的特征方程是

$$\frac{d}{dt} x_{\nu} = A_{\nu}(x) \quad (\nu = 1, \dots, n), \quad \frac{d}{dt} u = 0. \quad (7.2)$$

因此基础特征曲线仅由前 n 个方程就能完全决定, 而与 u 的初始值无关。这就是说, 沿着每条基础特征曲线的 u 的值保持不变。反过来, 沿着每条基础特征曲线的函数值保持一定的函数 $u = u(x)$ 必是方程 (7.1) 的解。

一般地说, 如果有一个函数 $f(x)$, 它的函数值沿着微分方程组

$$\frac{dx_1}{A_1(x)} = \frac{dx_2}{A_2(x)} = \dots = \frac{dx_n}{A_n(x)} \quad (7.3)$$

的每一条解曲线 $x = x(t)$ 保持不变的话, 则称这个函数 $f(x)$ 为 (7.3) 的积分。于是有这样的结果: $f(x)$ 是 (7.3) 的积分与 $u = f(x)$ 是 (7.1) 的解这两个事实是一致的。

现在设 $x = x^0$ 是 (7.1) 的正常点, 并且假设 $A_1(x^0) \neq 0$ (在 $x = x^0$ 的邻域都成立), 在 (7.3) 中把 x_1 看成是独立变数, 那么 (7.3) 就成为普通的微分方程组

$$\frac{dx_{\nu}}{dx_1} = \frac{A_{\nu}(x)}{A_1(x)} \quad (\nu = 2, \dots, n). \quad (7.4)$$

設方程組(7.4)的一般解是

$$x_{\nu+1} = \phi_{\nu}(x_1, c_1, \dots, c_{n-1}) \quad (\nu=1, \dots, n-1) \quad (7.5)$$

(这里 c_1, \dots, c_{n-1} 是积分常数), 并且有

$$\frac{D(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})}{D(c_1, \dots, c_{n-1})} \neq 0 \quad (7.6)$$

(在 x_1, c_1, \dots, c_{n-1} 的适当的范围中成立)。譬如我們把(7.5)看成是方程組(7.4)滿足条件 $x_1 = x_1^0$ 时, $x_{\nu+1} = c_{\nu}$ 的解, 則 $\phi_{\nu}(x_1^0, c_1, \dots, c_{n-1}) = c_{\nu}$, 从而可得到(7.6)。于是令 $x_{\nu+1}^0 = \phi_{\nu}(x_1^0, c^0)$, 由于(7.5), 故在 $x = x^0$ 适当的邻域, 可以把 c 解出成为 x 的函数, 从而得到与(7.5)等价的关系式:

$$c_{\mu} = f_{\mu}(x_1, \dots, x_n) \quad (\mu=1, \dots, n-1). \quad (7.7)$$

因为(7.7)与(7.5)是同等的, 所以

$$f_{\mu}(x)_{x=\phi(x_1, c)} = c_{\mu} \quad [x_1 = \phi_0(x_1, c)], \quad (7.8)$$

故 $f_{\mu}(x)$ 是(7.3)的积分, 也就是(7.1)的解。此外由于(7.8),

$$\frac{D(f_1, \dots, f_{n-1})}{D(x_2, \dots, x_n)_{x=x^0}} = \frac{D(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})}{D(c_1, \dots, c_{n-1})} = 1,$$

所以

$$\frac{D(f_1, \dots, f_{n-1})}{D(x_2, \dots, x_n)_{x=x^0}} \neq 0. \quad (7.9)$$

上面我們仅在 $A_1(x^0) \neq 0$ 的假設下作了討論, 一般地說, 如果 $x = x^0$ 是方程(7.1)的正常点的话, 那么在 $x = x^0$ 的邻域, 必定存在着 $n-1$ 个方程(7.1)的解 $u = f_{\mu}$, 并且滿足

$$\text{Rk} \left(\partial_{\nu} f_{\mu}(x) \right)_{\substack{\mu=1, \dots, n-1 \\ \nu=1, \dots, n}} = (n-1). \quad (7.10)$$

此外, 如果 $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 是方程(7.1)的解, 則它們結合而成的函数

$$u = g(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) \quad (7.11)$$

也是(7.1)的解(沿着每条基础特征曲綫函数值不变)。反过来, 如

果 $x=x^0$ 是 (7.1) 的正常点, 而 $u=f_\mu$ 是方程 (7.1) 满足条件 (7.10) 的解, 则 (7.1) 的任意解一定可以写成 (7.11) 的形式 (在 $x=x^0$ 的邻域)。事实上, 如果 $A_1(x^0) \neq 0$, 则由

$$\partial_1 f_\mu + \sum_{\nu=2}^n A_\nu(x) \cdot A_1(x) \cdot \partial_\nu f_\mu = 0$$

可得

$$\text{Rk} \left(\partial_\nu f_\mu \begin{matrix} \mu+1, \dots, n-1 \\ \nu=2, \dots, n \end{matrix} \right) = \text{Rk} \left(\partial_\nu f_\mu \begin{matrix} \mu+1, \dots, n-1 \\ \nu=1, \dots, n \end{matrix} \right) = n-1.$$

所以如令 $f_\mu(x^0) = c_\mu^0$, 则在 $x=x^0$ 适当的邻域, 利用 (7.7) 可以把 x_2, \dots, x_n 解出成为 x_1, c_1, \dots, c_{n-1} 的函数, 从而得到公式 (7.5)。(7.5) 是常微分方程组 (7.3) 的解。

现在若 $u=u(x)$ 是 (7.1) 的解, 那么它在沿着 (7.3) 的解 (7.5) 上, 必定有一定的值。于是

$$u(x)_{x=\phi(x_1, c)} = g(c_1, \dots, c_{n-1}). \quad (7.12)$$

但是 (7.5) 与 (7.7) 是等价的, 所以

$$\phi_\mu(x_1, c)_{c=f(x)} = x_{\mu+1},$$

于是在 (7.12) 中将 c_μ 换成 $f_\mu(x)$ 后, 就得到

$$u(x) = g(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)).$$

综上所述, 就得到了下面的定理。

定理 7.1 在 (7.1) 的正常点 $x=x^0$ 的邻域, 方程 (7.1) 具有 $n-1$ 个满足条件 (7.10) 的解 $u=f_\mu$, (7.1) 的任意解可以表达成为 (7.11) 的形式 (其中 g 是任意函数)。

注意 在定理 7.1 中, 若是 $A_\nu(x)$ 为 p 次连续可微, 则 $f_\mu(x)$ 也 p 次连续可微。若是 $A_\nu(x)$ 解析正则, 则 $f_\mu(x)$ 也能够是解析正则的。至于这时关于 (7.3) 积分的讨论, 可以参看南云道夫著:《微分方程》I §5 (共立社出版)。

例 1 $xu_x + yu_y + zu_z = 0$.

u 是方程组

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

的积分。容易证明 $f_1=y/x$, $f_2=z/x$ 是方程组的两个积分, 并且 f_1, f_2 在

$x \neq 0$ 处满足条件(7.10)。所以当 $x \neq 0$ 时,

$$u = g(y/x, z/x) \quad (g \text{ 是任意函数}).$$

例2 $(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = 0$,

u 是方程组

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \quad (*)$$

的积分,令 $(*) = dt$, 而把 t 看成独立变数,则

$$\frac{d}{dt} x = y-z, \quad \frac{d}{dt} y = z-x, \quad \frac{d}{dt} z = x-y, \quad (**)$$

于是就有 $\frac{d}{dt}(x+y+z) = 0$, 即 $f_1 = x+y+z$ 是 $(*)$ 的积分。另外由 $(**)$ 有

$$2 \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

所以 $f_2 = x^2 + y^2 + z^2$ 也是 $(*)$ 的积分。又因为除去 $x=y=z$ 以外,条件(7.10)恒成立,所以在正常点处(即除去 $x=y=z$ 的情形),有解

$$u = g(x+y+z, x^2+y^2+z^2) \quad (g \text{ 是任意函数}).$$

2. 变成齐次线性方程的变换 下面我们讲一下,一般的一阶拟线性偏微分方程可以变成齐次线性方程而求解。

对于拟线性方程(5.2)的解 $u = u(x)$, 我们假设它可以写成隐函数的形式

$$f(x, u) = c, \text{ 这里 } f_u \neq 0, \quad (7.13)$$

其中 c 是任意的常数(在某一个适当范围内)。由(7.13)容易得到

$$\partial_x u(x) = - (f_{x_u} / f_u)_{u=u(x)}. \quad (7.14)$$

把这个结果代入(5.2),就得到

$$\left\{ \sum_{v=1}^n A_v(x, u) f_{x_v} + F(x, u) f_u \right\}_{u=u(x)} = 0.$$

如果对于任意的 c (在某一范围内), 由(7.13)所定义的隐函数 $u = u(x, c)$ 都是方程(5.2)的解,那么 u 的值也在某一个范围内是任意的。于是可以把 f 看成是依赖于独立变数 x 及 u 的函数,并且满足齐次线性方程

$$\sum_{v=1}^n A_v(x, u) \partial_{x_v} f + F(x, u) \partial_u f = 0. \quad (7.15)$$

反过来,对于(7.15)的满足条件 $f_u \neq 0$ 的解 $f(x, u)$,可以根据(7.13)决定出 $u=u(x)$,再根据(7.14)就知道 $u=u(x)$ 是(5.2)的解。

现在还有一个问题,就是方程(5.2)所有的解是否都可以用这种方法得到?因此,我们要考虑到下面这个事实,即一切的解都是由它的初始条件所决定的。现在设方程在 (x^0, u^0) 处是正常的,我们就在 (x^0, u^0) 的邻域来考虑问题。不失一般性可以假设 $A_1(x, u) \neq 0$,若 $u=u(x)$ 是(5.2)的解,而令 $u(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = \beta(x_2, \dots, x_n)$,则在 $x=x^0$ 适当的邻域,由初始条件

$$x_1=x_1^0 \text{ 时, } u=\beta(x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (7.16)$$

所决定的解是唯一的。其次,方程(7.15)在 (x_1^0, u^0) 适当的邻域,满足初始条件

$$x=x_1^0 \text{ 时, } f=u-\beta(x_2, \dots, x_n)$$

的解也是唯一的,并且因为 $f_u(x^0, u^0)=1 \neq 0$,所以利用这个解 $f(x, u)$ 所定义的方程 $f(x, u)=0$,可以决定隐函数 $u=u(x)$,而它是方程(5.2)的解,并且满足初始条件(7.16)。因此方程(5.2)在正常点 (x^0, u^0) 邻域的所有的解都可以用上面的方法求得。

例 1 $\sum_{v=1}^n x_v \partial_{x_v} u = ku.$

它的齐次方程是

$$\sum_{v=1}^n x_v \partial_{x_v} f + ku \partial_u f = 0.$$

并且 $f_1 = x_1^{-k}u, f_2 = x_1^{-1}x_2, \dots, f_n = x_1^{-1}x_n$ 都是方程的解。此外容易验证,当 $x_1 \neq 0$ 时, f_1, \dots, f_n 满足条件(7.10),因此齐次方程的一般解是

$$f = g(u/x_1^k, x_2/x_1, \dots, x_n/x_1) \quad (g \text{ 任意函数}).$$

在这里可从 $f=c$ 解出 u ,得到

$$u = x_1^k \phi(x_2/x_1, \dots, x_n/x_1) \quad (\phi \text{ 任意函数}).$$

例 2 $(cy - bu)u_x + (au - cx)u_y = bx - ay.$

它的齐次方程是

$$(cy - bu)f_x + (au - cx)f_y + (bx - ay)f_u = 0,$$

齐次方程所属的特征方程是

$$\frac{dx}{cy - bu} = \frac{dy}{au - cx} = \frac{du}{bx - ay}.$$

容易証明

$$f_1 = x^2 + y^2 + u^2, f_2 = ax + by + cu$$

是常微分方程组的积分,此外在 $x:y:u = a:b:c$ 不成立的情形下,

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_u f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_u f_2 \end{pmatrix} = 2,$$

于是原方程的一般解可以由关系式

$$\phi(x^2 + y^2 + u^2, ax + by + cu) = 0 \quad (\phi \text{ 任意的})$$

得出。

习题 1 求下列各偏微分方程的一般解。

(a) $xu_x + yu_y = u^2.$

(b) $xu_x - yu_y = x^2 + y^2.$

(c) $(y+u)u_x + (x+u)u_y = x+y.$

(d) $\tan x \cdot u_x + \tan y \cdot u_y = \tan u.$

(e) $(e^x + u)u_x + (e^y + u)u_y = u^2 - e^{x+y}.$

习题 2 証明: 半线性方程

$$\sum_{\nu=1}^n A_\nu(x) \partial_\nu u = F(x, u)$$

的一般解(在方程的正常点处)可以表示为

$$u = G(x, \phi(H_1(x), \dots, H_{n-1}(x))),$$

其中 ϕ 是任意函数,并且

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_\nu H_\mu(x) & \mu+1, \dots, n-1 \\ \nu+1, \dots, n \end{pmatrix} = n-1.$$

§ 8 主部相等的联立拟线性微分方程组

含有二个以上未知函数的联立拟线性(或是线性)偏微分方程组的理論,一般地說,是非常深的,但是象下面这种形式的联立方程组

$$\sum_{\nu=1}^n A_\nu(x, u) \partial_\nu u_i = F_i(x, u) \quad (i=1, \dots, l), \quad (8.1)$$

其中未知函数是 $u = (u_1, \dots, u_l)$, 可以象单独一个拟线性方程那样地来讨论。这样的联立方程组叫做**主部相等**的联立拟线性偏微分方程组。这里每个方程的主部分别是一个未知函数的偏导数的一次齐式, 并且齐式的系数函数与各个方程无关, 恒具有同一的形式。

对于方程组(8.1), 与 x 及 u 有关的联立常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_\nu &= A_\nu(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_l) \quad (\nu=1, \dots, n) \\ \frac{d}{dt} u_i &= F_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_l) \quad (i=1, \dots, l) \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

叫做**特征方程组**。它的解 $(x, u) = \{x, u\}(t)$ 是在空间 E^{n+l} 的某一部分内的曲线 (t 是参变数), 叫做(8.1)的**特征曲线**。特征曲线到 x 空间 E^n 的正射影 $x = x(t)$ 叫做**基础特征曲线**。和 § 5.6 中的讨论完全一样, 能够得到下面的两个定理。

定理 8.1 函数 $u = u(x)$ 是 (8.1) 的解的充分必要条件是, 通过 $u = u(x)$ 的任意一点 (x^0, u^0) ($u^0 = u(x^0)$) 的特征曲线 $(x, u) = \{x, u\}(t)$, 一定落在曲面 $u = u(x)$ 上, 即 $u(t) = u(x)_{x=x(t)}$ 。

因此(8.1)的解是空间 E^{n+l} 中由无穷多特征曲线所组成的 n 维的流形。

定理 8.2 设 E^{n+l} 空间中有 $n-1$ 维的初始流形

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= \alpha_\nu(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (\nu=1, \dots, n), \\ u_i &= \beta_i(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (i=1, \dots, l), \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

并且成立着关系

$$\left| A_\nu(\alpha, \beta) \quad \partial_\mu \alpha_\nu \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \neq 0. \quad (8.4)$$

设 (x^0, u^0) 是(8.3)上的任意一点, 则在 x^0 适当的邻域, 方程(8.1)存在着唯一的一组含有(8.3)的解(即当 $x = \alpha(s)$ 时 $u = \beta(s)$)。

这些定理的证明方法和 § 5.6 中的证法完全一样。

第3章 一般的单独一阶的偏微分方程

本章叙述一般单独的一阶偏微分方程(主要是非线性的)的古典理論和解法。若是沒有特別說明,就假設討論中所有的函数在一个适当的区域中都是相当次数連續可微的实函数。实际上,常常只要假設二次連續可微就够了。

§9 面 素 組

1. 面素 一般在討論(非线性)一阶偏微分方程的时候,总設 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 为独立变数, $u = u(x)$ 为未知函数,并且为了书写上的便利,常把偏导函数 $\partial_\nu u$ 記作 p_ν 。这不仅因为可以用 p_ν 来代表 $\partial_\nu u$, 而且因为在理論探討过程中,常常有这种必要把 p_ν 与 x 及 u 一并看成是独立变数。此外,为了便利起見,引入 p 来代表 n 个 p_1, p_2, \dots, p_n 。这些量的几何表現方法,是把 $2n+1$ 个实数组

$$(x^0, u^0, p^0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, u, p_1^0, \dots, p_n^0)$$

看成是 (x, u) 空間 B^{n+1} 中的某一点 (x^0, u^0) , 以及通过它的一个平面(n 維的)

$$u - u^0 = \sum_{\nu=1}^n p_\nu^0 (x_\nu - x_\nu^0). \quad (9.1)$$

但是这个方程也可以解釋为以这一点作为切点的曲面的切平面。直观地来看,这表示曲面的无限小部分可以看成是一部分平面。所以在这种观点指导之下,我們与其說 (x^0, u^0, p^0) 所表示的平面是一个无限延伸的平面,倒不如把平面(9.1)理解为含有点 (x^0, u^0) 的无限小部分来得更好一些。因此我們把 (x^0, u^0, p^0) 叫

做面素,也叫做接触元素。在面素 (x^0, u^0, p^0) 中, (x^0, u^0) 叫做点成分, p^0 叫做方向成分。

2. 面素組 現在假設对曲面(n 維的) $u=u(x)$ 成立条件

$$u^0 = u(x^0), p_\nu^0 = \partial_\nu u(x^0) \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

这时我們就說曲面 $u=u(x)$ 含有面素 (x^0, u^0, p^0) 。于是,如果有两个曲面含有一个公共的面素 (x^0, u^0, p^0) ,那就意味着这两个曲面在点 (x^0, u^0) 处相切。

下面我們考虑在 (x, u, p) 空間 E^{2n+1} 中面素的 r 維流形

$$(x, u, p) = \{X, U, P\}(s_1, \dots, s_r), \quad (9.2)$$

其中 (s_1, \dots, s_r) 是参变数。它們在 (x, u) 空間 E^{n+1} 的点成分流形是

$$(x, u) = \{X, U\}(s), \quad s = (s_1, \dots, s_r). \quad (9.3)$$

現在討論一下(9.3)与(9.2)中各面素的相切条件,就是說,对于任意的 $s=s^0$,求 $(x, u) = \{X, U\}(s^0)$ 与

$$u - U(s^0) = \sum_{\nu=1}^n P_\nu(s^0)(x_\nu - X_\nu(s^0)) \quad (9.4)$$

相切的条件。

为了这个目的,事实上只要得到(9.3)所包含的通过 $\{X, U\}(s^0)$ 的任意曲綫与(9.4)相切的条件即可。这时,把 s (r 个变数)看成是 t (1个变数)的任意函数,并設

$$\{X, U\}(s(t)) = \{\bar{x}, \bar{u}\}(t).$$

由于对于任意的 $t=t^0$, $(s^0=s(t^0))$,曲綫 $(x, u) = \{\bar{x}, \bar{u}\}(t)$ 与(9.4)相切,所以有

$$\bar{u}'(t) = \sum_{\nu=1}^n P_\nu(s(t)) \bar{x}'_\nu(t), \quad (9.5)$$

即

$$\left\{ \sum_{\rho=1}^r \partial_\rho U \cdot s'_\rho(t) \right\}_{s=s(t)} = \left\{ \sum_{\nu=1}^n P_\nu \sum_{\rho=1}^r \partial_\rho X_\nu \cdot s'_\rho(t) \right\}_{s=s(t)}.$$

因为这里的 $s_\rho(t)$ 是任意函数,所以比較等式两边关于 s'_ρ 的系数,就有

$$\partial_\rho U = \sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_\rho X_\nu \quad (\rho=1, \dots, r). \quad (9.6)$$

为了把条件写成与参变数 s 无关而又容易记忆的形式, 我们分别在等式两边乘以 ds_ρ , 并且把 r 个方程相加, 就得到了下面的全微分式

$$dU = \sum_{\nu=1}^n P_\nu dX_\nu. \quad (9.7)$$

(9.7) 与 (9.6) 实际是等价的关系式 (因为 ds_ρ 是任意的)。反过来, 由于 (9.7), 等式 (9.5) 也成立。因此, (9.7) 是 (9.3) 与 (9.2) 中各面素相切的充分必要条件。所以当 (9.7) 成立时, (9.2) 叫做 r 维的面素组。对于面素组 (9.2), 它的点成分流形 (9.3) 叫做支体 (也有人称为支台)。特别对于一维的面素组, 它的支体是一维流形, 即是曲线, 我们又叫做带, 所以 r 维的面素组也简单地叫做 r 维带, 这时就把 (9.7) 叫做成带条件。

另外, 如果把参变数 s 看成为其他参变数 $s' = (s'_1, \dots, s'_{r'})$ (可以认为 $r' \neq r$) 的任意函数, 我们来考虑 (9.2) 或是它的一个部分流形。由于 s' 是独立变数, 所以容易由 (9.6) 导出同样的公式

$$\partial'_\rho U = \sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial'_\rho X_\nu \quad (\rho=1, \dots, r').$$

至于公式 (9.7), 它具有与参数选择无关的这一特点。

特别, 对于一个 n 维的面素组 (9.2), 如果满足条件

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(s_1, \dots, s_n)} \neq 0, \quad (9.8)$$

那么在局部的范围内可以代替参数 s 而取 $x (= X)$ 为独立变数。这个时候, 条件 (9.6) 就成为

$$P_\nu = \partial_{x_\nu} U \quad (\nu=1, \dots, n). \quad (9.9)$$

这样就得到了下面的定理。

定理 9.1 对 n 维的面素组 (9.2) ($r=n$), 如果成立条件 (9.8),

則可以取 x 为独立变数, 而条件 (9.9) 成立。

此外, r 維面素組的任意 r' 維 ($r' \leq r$) 的部分流形

$$(x, u, p) = \{X, U, P\}(s(s'_1, \dots, s'_{r'}))$$

仍是面素組。

注意 1 若面素組 (9.2) 是 r 維的, 則有

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_p X_\nu(s) & \partial_p U(s) & \partial_p P_\nu(s) \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} = r.$$

对于 r 維的面素組, 它的支体的維数不能超过 r , 但是可以小于 r . 在极端的情形, 支体能够蜕化成为一个点 (零維的)。这时, 由于 $dX_p=0$, $dU=0$, 所以对于完全任意的 P_ν , 成带条件 (9.7) 恒成立。于是有 $X_\nu(s)=a_\nu$ (常数), $U(s)=b$ (常数)。如果取 $P_\nu(s)=s_\nu$ ($\nu=1, \dots, n$), 它就成为 n 維的面素組。

注意 2 若是成带条件被滿足的話, 那么 $X_\nu(s)$, $U(s)$ 必須是全微分可能的函数, 但是对 $P_\nu(s)$ 沒有假設微分可能的必要。因此, 在定理 9.1 中假設 $X_\nu(s)$ 及 $U(s)$ 一次連續可微而 $P_\nu(s)$ 只要連續即可。

但是在面素組的維数定义 (注意 1) 中用到了 $P_\nu(s)$ 的微分可能性。所以这时仅当支体的維数恰好是 r , 即

$$\text{Rk}(\partial_p X_\nu(s) \quad \partial_p U(s)) = r \quad (\text{参变数的个数})$$

时 (这时即使 $P_\nu(s)$ 不可微), 才可以认为 (9.2) 是 r 維的。当支体的維数比这个数小时, 这个问题的討論將是非常困难的。

习题 对于 (x, y, u) 空間 E^3 中的一条曲綫 $(x, y, u) = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\}(t)$, 設 $(\bar{x}'(t), \bar{y}'(t)) \neq (0, 0)$, 求以这条曲綫为支体的二維面素組。現在假設 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\}(t)$ 二次連續可微。

§ 10 一阶偏微分方程, 正常解, 奇异解

設 $F(x, u, p)$ 是关于 $2n+1$ 个变数 $(x, u, p) = (x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ 的已知函数, 則方程

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0 \quad (10.1)$$

叫做关于未知函数 $u=u(x)$ 的一般一阶偏微分方程。使 (10.1) 恒等地成立的函数 $u=u(x)$ 叫做 (10.1) 的解。由定理 9.1 就能得到下面的定理。

定理 10.1 (10.1)的解是满足方程

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (10.2)$$

的 n 维面素组 (9.2) ($r=n$) 的支体所成的 (n 维) 曲面 $u=u(x)$, 并且这部分支体还要满足条件 (9.8)。

如果对面素 (x^0, u^0, p^0) 满足条件

$$\{F_{p_1}, \dots, F_{p_n}\}(x^0, u^0, p^0) \neq \{0, \dots, 0\}, \quad (10.3)$$

那么就說 F 在 (x^0, u^0, p^0) 处是**正常的**, 并且叫 (x^0, u^0, p^0) 为 F 的**正常面素**。若 (x^0, u^0, p^0) 是满足 (10.2) 的正常面素, 則在 (x^0, u^0, p^0) 的邻域 [在 (x, u, p) 空間 E^{2n+1}], 根据方程 (10.2), 可以把 p_ν 中的某一个表成其余 $2n$ 个变数 (x, u) 以及另外 $n-1$ 个 p_ν 的函数, 譬如当

$$F(x^0, u^0, p^0) = 0, \quad F_{p_1}(x^0, u^0, p^0) \neq 0$$

时, 在 (x^0, u^0, p^0) 的邻域利用 (10.2) 可以解出 p_1 , 而得到与 (10.2) 等价的方程

$$p_1 = f(x_1, \dots, x_n, u, p_2, \dots, p_n), \quad (10.4)$$

这样就得到了一个与 (10.1) 等价的偏微分方程

$$\partial_1 u = f(x_1, \dots, x_n, u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u). \quad (10.5)$$

与 (10.1) 对照, 这种方程叫做“**基准型**”的偏微分方程。

若 (x^0, u^0, p^0) 不是 F 的正常面素, 即

$$\{F_{p_1}, \dots, F_{p_n}\}(x^0, u^0, p^0) = (0, \dots, 0), \quad (10.6)$$

这时, (x^0, u^0, p^0) 叫做 F 的**奇异面素**。 F 的只含有正常面素的解叫做 (10.1) 的**正常解**, 只含有奇异面素的解叫做**奇异解**。因此, 对 (10.1) 的奇异解 $u=u(x)$, 若設

$$u=u(x), \quad p_\nu = \partial_\nu u(x) \quad (\nu=1, \dots, n),$$

則它們恒等地滿足 $n+1$ 个方程

$$F(x, u, p) = 0, \quad F_{p_\nu}(x, u, p) = 0 \quad (\nu=1, \dots, n). \quad (10.7)$$

若 $u=u(x)$ 是奇异解, 令 $(u, p) = \{u, u_x\}(x)$, 把 (10.7) 中的

第一个方程对 x_μ 微分, 则得

$$F_{x_\mu} + F_u p_\mu + \sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu} \partial_\mu p_\nu = 0, [(u, p) = \{u, u_x\}(x)].$$

因此由(10.7)后面的 n 个方程, 就有

$$F_{x_\mu} + F_u p_\mu = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n), [(u, p) = \{u, u_x\}(x)]. \quad (10.8)$$

这就表示着, 奇异解非满足(10.7)及(10.8)这 $2n+1$ 个方程不可。反过来, 如果存在同时满足(10.7)及(10.8)的 $n+1$ 个函数 $(u, p) = \{u, p\}(x)$ [这里不需要把 $p(x)$ 认为是 $u(x)$ 的导函数], 先把(10.7)中最初的式子对 x_μ 微分, 则有

$$F_{x_\mu} + F_u \partial_\mu u + \sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu} \partial_\mu p_\nu = 0, [(u, p) = \{u, p\}(x)].$$

因此根据这个式子, 以及(10.7)后面的 n 个式子, 在(10.8)内代入 $(u, p) = \{u, p\}(x)$ 后, 就得到

$$(F_u)_{(u, p) = \{u, p\}(x)} (\partial_\mu u - p_\mu) = 0.$$

假设再有“ $F_u \neq 0$ ”, 则得 $p_\mu(x) = \partial_\mu u(x)$, 即 $u = u(x)$ 是方程(10.1)的奇异解。

如果奇异解存在的话, 那么这 $n+1$ 个函数 u, p_1, \dots, p_n 非一齐满足(10.7)及(10.8)中的 $2n+1$ 个方程不可, 因此, 除了特殊的情形以外, 一般地说, 奇异解并不存在。

例 1 $F \equiv \sum_{\nu=1}^n p_\nu^2 - u = 0 \quad (p_\nu = \partial_\nu u),$

满足(10.7)的 u 与 p 是 $u=0, p_\nu=0$, 故奇异解仅能是 $u \equiv 0$.

例 2 $F \equiv \sum_{\nu=1}^n (p_\nu - x_\nu)^2 - u = 0 \quad (p_\nu = \partial_\nu u),$

由(10.7)及(10.8)有 $x_\nu=0, p_\nu=0, u=0$. 因为 x 是独立变数, 所以条件不可能成立, 故奇异解不存在。

注意 若 F 是 p 的一次齐式 (即拟线性方程的情形), 这时, 面素 (x^0, u^0, p^0) 是正常的条件与点 (x^0, u^0) 是正常的条件完全一致, 而与 p^0 的值无关。

若是一个面素对于两个等价的方程之一是正常的, 但是对于另一方程是奇异的, 那么我们就常常取面素为正常的那一方程来讨论。

§ 11 特 征 带

1. 特征带 令 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, 而考虑偏微分方程

$$F(x, u, p) = 0 \quad (p_\nu = \partial_\nu u). \quad (11.1)$$

若是这个方程存在着解, 将方程(11.1)对 x_ν 微分, 有

$$F_{x_\nu} + F_u \partial_\nu u + \sum_{\mu=1}^n F_{p_\mu} \partial_\nu p_\mu = 0, \quad [(u, p) = \{u, p\}(x)].$$

由于 $\partial_\nu u = p_\nu$, 而有 $\partial_\nu p_\mu = \partial_\nu^2 u = \partial_\mu p_\nu$, 所以上式可以写成

$$\sum_{\mu=1}^n F_{p_\mu} \partial_\mu p_\nu = -F_{x_\nu} - F_u p_\nu \quad [(u, p) = \{u, p\}(x)] \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (11.2)$$

又因为 $\partial_\mu u = p_\mu$, 所以有

$$\sum_{\mu=1}^n F_{p_\mu} \partial_\mu u = \sum_{\mu=1}^n F_{p_\mu} p_\mu \quad [(u, p) = \{u, p\}(x)]. \quad (11.3)$$

因此, 对方程(11.1)的解 $u = u(x)$ 所含有的面素 (x, u, p) , 如以 u, p 为未知函数, 则它们满足一组主部相等的拟线性偏微分方程组(11.2)及(11.3)。这组方程的特征方程组是

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_\nu &= F_{p_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n), \\ \frac{d}{dt} u &= \sum_{\mu=1}^n F_{p_\mu} p_\mu, \\ \frac{d}{dt} p_\nu &= -F_{x_\nu} - F_u p_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

方程组(11.4)又叫做偏微分方程(11.1)的特征方程组。(11.4)的解 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$ 构成一维的面素组(带)。由(11.4)很容易证明

$$\frac{d}{dt} u - \sum_{\nu=1}^n p_\nu \frac{d}{dt} x_\nu = 0.$$

由(11.4)的解所构成的带叫做方程(11.1)的特征带。它的支

体 $(x, u) = \{x, u\}(t)$ (曲綫) 叫做方程 (11.1) 的特征曲綫。

其次, $F(x, u, p)$ 是常微分方程組 (11.4) 的积分。实际上, 取 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$ 代入 $F(x, u, p)$, 并作微分, 就有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F &= \sum_{\nu=1}^n F_{x_\nu} \frac{dx_\nu}{dt} + F_u \frac{du}{dt} + \sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu} \frac{dp_\nu}{dt} \\ &= \sum_{\nu=1}^n F_{x_\nu} F_{p_\nu} + F_u \sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu} p_\nu - \sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu} (F_{x_\nu} + F_u p_\nu) \\ &= 0. \end{aligned}$$

对联立方程組 (11.2) 及 (11.3) 应用定理 8.1, 就能够得到这样的結論: 若是方程 (11.1) 的解 $u=u(x)$ 含有面素 (x^0, u^0, p^0) , 那么它就含有包含 (x^0, u^0, p^0) 的特征帶 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$. 于是就証明了下面的定理。

定理 11.1 方程 (11.4) 对于 F 是正常的解 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$ 組成帶。其次, $F(x, u, p)$ 是 (11.4) 的积分。又若 (11.1) 的解 $u=u(x)$ 含有面素 (x^0, u^0, p^0) , 則 $u=u(x)$ 就含有包含 (x^0, u^0, p^0) 的特征帶。

推論 如果 (11.1) 的两个解所表示的曲面在一点相切, 則这两个曲面沿着通过切点的整条特征帶相切 (即有公共的特征帶)。

如果方程 (11.1) 是拟綫性方程 (F 是 p 的一次齐式), 即

$$F \equiv \sum_{\nu=1}^n A_\nu(x, u) p_\nu - B(x, u) = 0,$$

則 $F_{p_\nu} = A_\nu(x, u)$, 并且由 $F=0$, 有

$$\sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu} p_\nu = B(x, u).$$

于是方程組 (11.4) 中前 $n+1$ 个方程是

$$\frac{d}{dt} x_\nu = A_\nu(x, u) \quad (\nu=1, \dots, n), \quad \frac{d}{dt} u = B(x, u).$$

这恰好与拟綫性方程 $F=0$ 的特征方程完全一致。

注意 上面的討論, 当 $F(x, u, p)$ 与 $u(x)$ 都是二次連續可微时就能成立。

例 1. 如果 F 是仅含有 p 的函数, 即

$$F(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (p_\nu = \partial_\nu u),$$

它的特征方程是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_\nu &= F_{p_\nu}(p), \quad \frac{d}{dt} u = \sum_{\mu=1}^n p_\mu F_{p_\mu}(p), \quad \frac{d}{dt} p_\nu = 0 \\ &(\nu=1, \dots, n). \end{aligned}$$

由后面的 n 个式子, 就得到了 $p_i = c_i$ (常数), 于是

$$x_\nu = F_{p_\nu}(c)t + a_\nu \quad (\nu=1, \dots, n),$$

$$u = \sum_{\mu=1}^n c_\mu F_{p_\mu}(c)t + b \quad (a_\nu, b \text{ 常数}).$$

即特征曲綫是直綫, 并且特征带的方向成分不变 ($p=c$). 这就是說: 对于 $F=0$ 的解的曲面 $u=u(x)$, 通过它的每个点有一条直綫(特征曲綫), 沿着这条直綫曲面与某一个平面 (n 維的) 相切。因此曲面是这些平面所成的平面族的包絡面。

2. 特征带的几何意义 我們考虑 $n=2$ 的情形, 并且代替 x_1, x_2, p_1, p_2 , 使用写法 x, y, p, q . 对于 (x, y, u) 空間 E^3 中的一点 (x^0, y^0, u^0) , 以及满足方程

$$F(x^0, y^0, u^0, p, q) = 0 \quad (11.5)$$

的面素 (x^0, y^0, u^0, p, q) , 現在研究一下平面

$$u - u^0 = p(x - x^0) + q(y - y^0) \quad (11.6)$$

的性質。

由于滿足(11.5)的 (p, q) 只能有一个自由度[并設 $(F_p, F_q) \neq (0, 0)$], 所以由它們所决定的平面族(11.6)包絡了一个以 (x^0, y^0, u^0) 为頂点的錐面。現在我們先求这个錐面的方程。由于 p, q 只有一个自由度, 所以可假設

$$(p, q) = \{p, q\}(\lambda) \quad (\lambda \text{ 是参变数}), \quad (11.7)$$

并且要滿足(11.5)。对于这(11.7), 方程(11.6)所形成的包絡面自然是由无限相近的两个 λ 值代入(11.6)后[即把(11.7)代入

(11.6)], 这两个平面的交线 l_λ 所生成的曲面。而 l_λ 是将 (11.6) [把 (11.7) 代入后] 对 λ 作微分, 即

$$0 = p'(\lambda)(x - x^0) + q'(\lambda)(y - y^0) \quad (11.8)$$

与方程 (11.6) [把 (11.7) 代入后] 所决定的直线。这些直线 l_λ 的集合所生成的曲面就是 (11.6) [把 (11.7) 代入后] 的包络面。

但是由 (11.5) [把 (11.7) 代入后] 有

$$(F_p)_0 p'(\lambda) + (F_q)_0 q'(\lambda) = 0, \quad (11.9)$$

$(\)_0$ 的意义是取 $(x, y, u, p, q) = (x^0, y^0, u^0, p(\lambda), q(\lambda))$ 。

假设 $(p'(\lambda), q'(\lambda)) \neq (0, 0)$, 由 (11.8) 及 (11.9) 就有

$$\begin{vmatrix} x - x^0 & y - y^0 \\ (F_p)_0 & (F_q)_0 \end{vmatrix} = 0.$$

因此如以 t 为参变数, 则直线 l_λ 的方程是

$$\left. \begin{aligned} x &= x^0 + t(F_p)_0, & y &= y^0 + t(F_q)_0, \\ u &= u^0 + t(pF_p + qF_q)_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

如果以 t 及 λ 两个变数作为参变数, 则 (11.10) 就是所求的包络面的方程, 它是由通过 (x^0, y^0, u^0) 的直线 l_λ 所生成的。这个锥面叫做 **Monge 锥面**。对于满足 (11.5) 的面素, 平面 (11.6) 沿着 l_λ 与 Monge 锥面相切。故方程 (11.1) 的解 $u = u(x, y)$, 在它上的任一点 (x^0, y^0, u^0) 与这点所属的 Monge 锥面相切。

如果以 dt 代替 t , 则可以用 dx, dy, du 来代替 $x - x^0, y - y^0, u - u^0$, 于是由 (11.10) 就得到微分方程组

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = dt. \quad (11.11)$$

现在向量 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}\right)$ 的方向与 Monge 锥面的母线 l_λ 的方向一致。并且容易看出, 满足 $F=0$ 及方程组 (11.11) 的 $(x, y, u, p, q) = \{x, y, u, p, q\}(t)$ 构成带。这种带叫做 **Monge 带**, 它的支体 $(x, y, u) = \{x, y, u\}(t)$ 叫做 **Monge 曲线**。如果 F 是 p ,

q 的一次齐式, 则 Monge 曲线就与特征曲线一致。

此外, 若是 Monge 带 $(x, y, u, p, q) = \{x, y, u, p, q\}(t)$ 包含在偏微分方程

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (p = u_x, q = u_y) \quad (11.12)$$

的解 $u = u(x, y)$ 内, 则因 $u = u(x, y)$ 所包含的面素全体, 作为 x, y 的函数, 应该满足下列方程组 [见 (11.2), (11.3)]

$$\left. \begin{aligned} F_p p_x + F_q p_y &= -F_x - F_u p, \\ F_p q_x + F_q q_y &= -F_y - F_u q. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

所以由 (11.11) 及 (11.13), 就得到

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - F_u p, \quad \frac{dq}{dt} = -F_y - F_u q. \quad (11.14)$$

这就是说: 包含于方程 (11.2) 的解内的 Monge 带是特征带。

一般地, 令 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, 则满足 $F = 0$ 以及

$$\frac{d}{dt} x_\nu = F_{p_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n), \quad \frac{d}{dt} u = \sum_{\nu=1}^n p_\nu F_{p_\nu}$$

的面素 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$ 构成带, 这种带就叫做 Monge 带, 它的支体叫做 Monge 曲线。

方程 (11.1) 的解所含有的 Monge 带就是特征带。

例 2 $F = p^2 + q^2 - 1 = 0$.

设 $(x, y, u, p, q) = (\cos 2t, \sin 2t, 2t, -\sin 2t, \cos 2t)$, 容易验证这是 Monge 带。但是对这个方程的特征带来说, p 与 q 都是定数, 即 (x, y, u) 非形成直线不可。

§ 12 Cauchy 存在定理

1. 初始面素组 令 $x = (x_1, \dots, x_n)$. 对 $u = u(x)$, $(x, u, p) = \{x, u, p\}(x)$ 形成一个 n 维的面素组, 如果把这里的独立变数 x 限制在一个 r 维流形上变动, 即

$$x_\nu = \alpha_\nu(s) \quad (\nu=1, \dots, n), \quad s = (s_1, \dots, s_r),$$

并令 $\{x, u, u_x\}(\alpha(s)) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$, 则 $(x, u, p) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 就形成一个 r 維的面素組 (它的支體也是 r 維的)。(見定理 8.1)

現在假設已給一个 $n-1$ 維的面素組 (支體也是 $n-1$ 維的), 即

$$(x, u, p) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (12.1)$$

試求方程 (11.1) 包含这—个面素組的解 $u=u(x)$. 这个問題叫做 **Cauchy 問題**, 这时, 面素組 (12.1) 叫做**初始面素組**。

至于問題的初始条件, 由于初始面素組的关系, 首先自然地可以附加以初始值

$$x = \alpha(s_1, \dots, s_{n-1}) \text{ 时, } u = \beta(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

这个时候, 以 $(x, u) = \{\alpha, \beta\}(s)$ 为支體的面素組 (12.1), 應該認為是滿足方程 (11.1) 的, 即滿足 (11.1) 以及成帶条件

$$\begin{aligned} F(\alpha(s), \beta(s), p) &= 0, \quad \partial_\mu \beta(s) = \sum_{\nu=1}^n p_\nu \partial_\mu \alpha_\nu(s) \\ (\mu &= 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (12.2)$$

这样决定了 $p = (p_1, \dots, p_n)$ 之后, 就可以認為 $p = \gamma(s)$. 即如果存在着一—个面素 $(x, u, p) = (\alpha^0, \beta^0, p^0)$, $(\alpha^0, \beta^0) = \{\alpha, \beta\}(s^0)$, 使得

$$\left| \begin{array}{cc} F_{p_\nu}(\alpha^0, \beta^0, p^0) & \partial_\mu \alpha_\nu(s^0) \\ \nu=1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{array} \right| \neq 0 \quad (12.3)$$

成立, 則在 $s=s^0$ 的邻域, 就可以由 (12.2) 把 p 决定成为 s 的函数。

如果設 $\alpha_1(s) \equiv x_1^0$, $\alpha_\nu(s) \equiv s_{\nu-1}$ ($\nu=2, \dots, n$), 則条件 (12.3) 与 $F_{p_1}(\alpha^0, \beta^0, p^0) \neq 0$ 一致。这时, 在 $(x, u, p) = (\alpha^0, \beta^0, p^0)$ 的邻域方程 (11.1) 可以化成它的等价式

$$p_1 = f(x, u, p_2, \dots, p_n),$$

面初始条件就成为

$$\text{当 } x_1 = x_1^0 \text{ 时, } u = \beta(x_2, \dots, x_n).$$

并且由(12.2)还有

$$\begin{aligned} p_\nu &= \partial_\nu \beta(x_2, \dots, x_n) = \gamma_\nu \quad (\nu=2, \dots, n), \\ p_1 &= f(x_1^0, x_2, \dots, x_n, \beta, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \gamma_1. \end{aligned}$$

此外,由定理 11.1, 如果方程 (11.1) 的解 $u=u(x)$ 含有初始面素组 (12.1), 则曲面 $u=u(x)$ 就包含着包含 (12.1) 中各面素的特征带 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t, s)$. 故方程 (11.1) 的解 $u=u(x)$ 一定是包含 (12.1) 的特征带 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t, s)$ 的面素所构成的 n 维曲面。

2. Cauchy 存在定理

定理 12.1 設对于初始面素组 (12.1) 成立着条件

$$F(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)) = 0 \quad (12.4)$$

以及

$$\left| F_{p_\nu}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \partial_\mu \alpha_\nu \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \neq 0. \quad (12.5)$$

再設 (12.1) 的任意一个面素为 $(x^0, u^0, p^0) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s^0)$, 則在 $x=x^0$ 的邻域, 方程 (11.1) 存在着唯一的包含 (12.1) 的解 $u=u(x)$ (二次連續可微)。

証明 設含有 (12.1) 中各面素的特征带, 即 (11.4) 中当 $t=0$ 时, $(x, u, p) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 的解, 取为

$$(x, u, p) = \{X, U, P\}(t, s). \quad (12.6)$$

因为 $F(x, u, p)$ 是 (11.4) 的积分, 所以由 (12.4) 有

$$F(X, U, P) = F(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \quad (12.7)$$

又 $x=X$ 是 (11.4) 的解, 所以由 (12.5) 有

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(t, s_1, \dots, s_{n-1})_{t=0}} = \left| F_{p_\nu}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \partial_\mu \alpha_\nu \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \neq 0. \quad (12.8)$$

所以 $x_\nu = X_\nu(t, s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (\nu=1, 2, \dots, n),$

这样, 就使得 $x=x^0$ 的邻域与 $(t, s) = (0, s^0)$ 的邻域成一对一的对

应,从而可以得到 t, s 是 x 的函数: $(t, s) = \{t, s\}(x)$. 于是令

$$U(t(x), s(x)) = u(x), \quad P_\nu(t(x), s(x)) = p_\nu(x),$$

由于 $X_\nu(t(x), s(x)) = x_\nu$, 所以从 (12.7) 就得到

$$F(x, u(x), p(x)) = 0. \quad (12.9)$$

所余下的问题是要证明 $p_\nu(x) = \partial_\nu u(x)$. 要达到这个目的, 只要利用 (12.8) 及定理 9.1 来证明方程 (12.6) 所决定的是 n 维的面素组即可。

首先设 s 是固定的, 由于 (12.6) 是带, 所以有

$$\partial_t U - \sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_t X_\nu = 0. \quad (12.10)$$

如果另外还成立

$$\partial_\mu U - \sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_\mu X_\nu = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n-1)$$

(∂_μ 表示对 s_μ 的偏微分), 那么把 (t, s) 看作独立变数, (9.7) 的面素组条件就成立。现在令

$$w_\mu = \partial_\mu U - \sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_\mu X_\nu, \quad (12.11)$$

于是只要证明 $w_\mu = 0$ 即可。

因为当 $t=0$ 时, $(X, U, P) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 是面素组, 所以 $(w_\mu)_{t=0} = 0$.

现在把 (12.11) 对 t 微分, 则有

$$\partial_t w_\mu = \partial_{t,\mu}^2 U - \sum_{\nu=1}^n \partial_t P_\nu \partial_\mu X_\nu - \sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_{t,\mu}^2 X_\nu. \quad (12.12)$$

另外把 (12.10) 对 s_μ 微分, 则有

$$0 = \partial_{t,\mu}^2 U - \sum_{\nu=1}^n \partial_\mu P_\nu \partial_t X_\nu - \sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_{t,\mu}^2 X_\nu.$$

由 (12.12) 减去上式, 则得

$$\partial_t w_\mu = \sum_{\nu=1}^n (\partial_\mu P_\nu \partial_t X_\nu - \partial_t P_\nu \partial_\mu X_\nu).$$

因为(12.6)是(11.4)的解,所以由

$$\partial_t X_\nu = (F_{p_\nu})_{(x, u, p)}, \quad \partial_t P_\nu = -(F_{x_\nu} + F_u p_\nu)_{(x, u, p)},$$

就有

$$\partial_t w_\mu = \sum_{\nu=1}^n \{F_{p_\nu} \partial_\mu p_\nu + (F_{x_\nu} + F_u p_\nu) \partial_\mu X_\nu\}_{(x, u, p)}. \quad (12.13)$$

另外把(12.7)对 s_μ 微分,则有

$$\left(\sum_{\nu=1}^n F_{x_\nu} \partial_\mu X_\nu + F_u \partial_\mu U + \sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu} \partial_\mu P_\nu \right)_{(x, u, p)} = 0.$$

从(12.13)式的右边减去此式,则有

$$\partial_t w_\mu = (F_u)_{(x, u, p)} \left(\sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_\mu X_\nu - \partial_\mu U \right) = -(F_u)_{(x, u, p)} w_\mu$$

[据(12.11)]. 于是得到

$$w_\mu = (w_\mu)_{t=0} \exp \left(- \int_0^t (F_u)_{(x, u, p)} dt \right).$$

但是已经说过 $(w_\mu)_{t=0} = 0$, 所以 $w_\mu = 0$, 因此(12.6)确是 n 維的面素組, 即 $u = u(x)$ 是方程(11.1)的解。

但是在 $x = x^0$ 的邻域, $t = 0$ 与 $x = \alpha(s)$ 的意义相等, 因此 $u = u(x)$ 含有(12.1)。此外, 方程(11.1)的所有含(12.1)的解都可以用上面的方法求得。 証毕

例1 解方程 $F = p_1^2 + p_2^2 - 1 = 0$, 初始条件是

$$(x_1, x_2) = (\cos s, \sin s) \text{ 时, } u = cs \quad (c \text{ 常数}).$$

由于 $p_1^2 + p_2^2 = 1$, 所以取 $(p_1, p_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$ 而討論一下初始面素組的条件。因为 $\beta'(s) = p_1 \alpha'_1 + p_2 \alpha'_2$, 所以

$$c = \sin(\theta - s), \text{ 从而 } \theta = s + \theta_0 \quad (\sin \theta_0 = c).$$

于是初始帶是

$$(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = \{\cos s, \sin s, cs, \cos(s + \theta_0), \sin(s + \theta_0)\},$$

而特征方程是

$$\frac{dx_1}{dt} = 2p_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2p_2, \quad \frac{du}{dt} = 2p_1^2 + 2p_2^2 = 2, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = 0.$$

因此

$$(p_1, p_2) = \{\cos(s + \theta_0), \sin(s + \theta_0)\},$$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= \{\cos s + 2t \cos(s + \theta_0), \sin s + 2t \sin(s + \theta_0)\}, \\ u &= \sin \theta_0 \cdot s + 2t \quad (s, t \text{ 是参变数}).\end{aligned}$$

現在能用第二个式子把 $t, \cos s, \sin s$ 解成 x_1, x_2 的具体的函数, 然后代入第三式, 就得到 u, u 是 x_1, x_2 的初等函数。

习题 1 在上面的例题中, 就 c 的值討論一下定理 12.1 中条件 (12.4) 及 (12.5) 成立与否的情形。

例 2 解方程 $F \equiv p_1 p_2 - u = 0$, 初始条件是 $x_1 = 0, u = x_2^2$ 。

(12.1) 中的流形是 $(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = (0, s, s^2, s/2, 2s)$, 特征方程是

$$\frac{dx_1}{p_2} = \frac{dx_2}{p_1} = \frac{du}{2p_1 p_2} = \frac{dp_1}{p_1} = \frac{dp_2}{p_2} = dt.$$

由这里就有

$$\begin{aligned}(p_1, p_2) &= \left(\frac{1}{2} s e^t, 2s e^t \right), \\ (x_1, x_2) &= \left(2s(e^t - 1), \frac{1}{2} s(e^t - 1) + s \right), \\ u &= s^2 e^{2t}.\end{aligned}$$

把 s, e^t 解出成为 x_1, x_2 的函数, 代入最后一式, 就得到

$$u = (x_2 + x_1/4)^2.$$

注意 1 为了使定理 12.1 成立, 只要設 $F(x, u, p)$ 二次連續可微, $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 一次連續可微即可。若 $F(x, u, p)$ 是 k 次, 而 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 是 $k-1$ 次連續可微, ($k \geq 2$), 則解 $u = u(x)$ 也必定 k 次連續可微。此外, 如果要求由 (12.2) 所决定的 $p = \gamma(s)$ 是 $k-1$ 次連續可微, 那么只要假設 $\alpha(s), \beta(s)$ k 次連續可微就够了。再者, 如果 $F(x, u, p)$ 以及 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 解析正則, 則解 $u = u(x)$ 也是解析正則的。

注意 2 如果定理 12.1 中的条件 (12.5) 对初始面素組 (12.1) 上一切的点都不成立的話, 这种 (12.1) 叫做拟特征的。为了容易理解, 我們討論一下 $n=2$ 的情形。这时, (12.1) 是拟特征的条件为

$$\begin{vmatrix} F_{p_1}(\alpha, \beta, \gamma) & \alpha'_1(s) \\ F_{p_2}(\alpha, \beta, \gamma) & \alpha'_2(s) \end{vmatrix} = 0.$$

若是对这个 (12.1), F 是正常的, 那么一定存在着 $\lambda(s)$, 使得

$$\alpha'_v(s) = \lambda(s) F_{p_v}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (v=1, 2).$$

又由成带条件可以得到

$$\beta'(s) = \sum_{v=1}^2 \gamma_v(s) \alpha'_v(s) = \lambda(s) \left(\sum_{v=1}^2 p_v F_{p_v} \right)_{(x, u, p) = (\alpha, \beta, \gamma)}.$$

因此, 初始带 $(x_1, u_1, p) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 满足微分方程组

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \frac{du}{p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2}} = \lambda(s) ds.$$

这个带是 Monge 带, 因此, 如果以这个带作为初始带的, (11.1) 包含这个带的解存在的话, 那么这个初始带就一定是特征带。

事实上, 在定理 12.1 的证明中, 在验证 (12.6) 是 n 维面素组时, 并没有用到条件 (12.5)。因此, 如果当 $t > 0$ (或是 $t < 0$) 时, 有

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(t, s_1, \dots, s_{n-1})} \neq 0,$$

那么把 t, s 看成是 x 的函数, 于是 $u = U(t(x), s(x))$ 就是方程 (11.1) 的解, 这解当 $t=0$ 时含有 (12.1)。这样, 就在以非特征带的 Monge 带作为初始带时, 也得到了方程 (11.1) 包含它的解, 从而导出了与上面矛盾的结果。要想消除这种矛盾现象, 可以假设解 $u = u(x)$ 应该二次连续可微。因为, 在初始带是非特征的 Monge 带的情形下, 一般解的曲面仅存在于 Monge 曲线的一侧, Monge 曲线本身常常作为解的曲面上的棱 (奇异点集合) 出现。

习题 2 对于例 1 中 c 的特殊值, 具体讨论一下注意 2 中所说的情形。

注意 3 定理 12.1 证明了由初始面素组可唯一地决定二次连续可微的解, 如果仅仅假设解是一次连续可微的, 那么用这种证法就不能保证解的唯一性。但是, A. Haar 曾在解是一次连续可微的假设下, 证明过 Cauchy 问题的解的唯一性 (1928 年), 见后面 § 17。

习题 3 对下列的微分方程求满足所给初始条件的解。(x, y 是独立变数, $p = u_x, q = u_y$.)

(a) $F \equiv pq - 1 = 0,$

初始条件: $x=0$ 时, $u = \sqrt{y}.$

(b) $F \equiv p^2 + q^2 - u^2 = 0,$

初始条件: $(x, y) = (\cos s, \sin s)$ 时 $u = ce^s.$

§ 13 完全解

1. 完全解 令 $x = (x_1, \dots, x_n), p = (p_1, \dots, p_n)$, 如果对面素 (x^0, u^0, p^0) 成立

$$\{F_u, F_{p_1}, \dots, F_{p_n}\}(x^0, u^0, p^0) \neq \{0, 0, \dots, 0\}, \quad (13.1)$$

則称 (x^0, u^0, p^0) 对于 F 是拟正常的。自然 F 的正常面素都是 F 的拟正常面素, 但是 F 的拟正常面素不一定是 F 的正常面素。

現在設 (x^0, u^0, p^0) 是滿足方程 $F(x^0, u^0, p^0) = 0$ 的 F 的拟正常面素。則在 (x, u, p) 空間 E^{2n+1} 的 (x^0, u^0, p^0) 的适当邻域, 滿足

$$F(x, u, p) = 0 \quad (13.2)$$

的面素 (x, u, p) 是 x 以及其他 n 个参变数 s_1, \dots, s_n 的函数, 并有与 (13.2) 等价的表达式

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= x_\nu, \\ u &= U(x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_n), \\ p_\nu &= P_\nu(x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_n), \\ &(\nu = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

这里

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_{s_\mu} U & \partial_{s_\mu} P_\nu & \mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} = n. \quad (13.4)$$

事实上, 根据 (13.2), 就可以把 u 及 p 中的某一个表示成为以其余的 n 个变量及 x 作为独立变数的函数, 因此, 把这 n 个作为独立变数的 u 与 p 写成 n 个 s , 就得到了上面的結果。反过来, 若是 (13.3) 所表示的面素滿足方程 (13.2), 那么根据条件 (13.4), (13.3) 就包含了一切滿足 (13.2) 的面素 [至少在 (x^0, u^0, p^0) 适当的邻域]。此外, 利用 (13.3) 中适当的 n 个式子 (一齐取前 n 个式子, $x_\nu = x_\nu$ 的情形除外), 就能把 s 表示成为 x, u, p 的函数

$$s_\mu = s_\mu(x, u, p) \quad (\mu = 1, \dots, n).$$

現在設 $u = V(x, c_1, \dots, c_n)$ 是偏微分方程 (13.2) [以后如果提到偏微分方程 (13.2) 时, 那就意味着在其中取 $p_\nu = \partial_\nu u$] 的具有 n 个任意常数 $c = (c_1, \dots, c_n)$ 的解。又在 (x, c) 空間 E^{2n} 的点 (x^0, c^0) 的某一个邻域, $u = V(x, c)$ 所含的面素为拟正常的, 即滿

足条件

$$\text{Rk}\left(\partial_{c_\mu} V \quad \partial_{c_\mu} V_{x_\nu} \quad \begin{smallmatrix} \mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n \end{smallmatrix}\right) = n, \quad (13.5)$$

这样, $u=V(x, c)$ 在 (x^0, c^0) 的邻域就称为偏微分方程 (13.2) 的完全解。

如果在 (13.3) 及 (13.4) 中以 c 来代替 s , 则有 $U=V, P_\nu=V_{x_\nu}$, 于是得到下面的定理。

定理 13.1 在 (x^0, c^0) 邻域的完全解, 必在 $(x, u, p) = \{x, V, V_x\}$ (x^0, c^0) 的适当邻域包含所有满足 (13.2) 的面素, 并且在 (x^0, c^0) 的邻域由关系式

$$(u, p) = \{V, V_x\}(x, c),$$

可以把 c 表达成为 x, u, p 的函数

$$c_\nu = s_\nu(x, u, p).$$

2. 完全解与一般解的关系 以后总把 (13.2) 考虑成为偏微分方程, 并设 $u=V(x, c)$ 是 (13.2) 的完全解, $u=f(x)$ 是 (13.2) 的任意解。若是 $u=f(x)$ 所包含的一个面素 (x^0, u^0, p^0) 也被 $u=V(x, c)$ 所包含, 那么根据定理 13.1, 在 $x=x^0$ 的适当邻域, $u=f(x)$ 所包含的一切面素都被 $u=V(x, c)$ 所包含, 现在由

$$\{f, f_x\}(x) = \{V, V_x\}(x, c)$$

可以把 c 作为 x 的函数解出, 而得到 $c_\nu = s_\nu(x, f(x), f_x(x))$, 把它简写成 $c=c(x)$, 于是得到

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= V(x, c(x)), \\ f_{x_\nu}(x) &= V_{x_\nu}(x, c(x)) \quad (\nu=1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

把 (13.6) 中的第一式对 x_ν 微分, 则有

$$f_{x_\nu}(x) = (V_{x_\nu})_{c=c(x)} + \sum_{\mu=1}^n (V_{c_\mu})_{c=c(x)} \partial_\nu c_\mu(x).$$

所以由 (13.6) 的后一式, 就得到

$$\sum_{\mu=1}^n (V_{c_\mu})_{c=c(x)} \partial_\nu c_\mu(x) = 0 \quad (\nu=1, \dots, n). \quad (13.7)$$

下面分两种情形进行讨论。

第一种情形, 首先考虑

$$(V_{c_1}, \dots, V_{c_n})_{c=c(x)} \neq (0, 0, \dots, 0) \quad (13.8)$$

的情形。这时, 根据(13.7)有

$$\frac{D(c_1, \dots, c_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = 0.$$

即在 $x=x^0$ 的邻域, 有

$$\text{Rk} \left(\partial_\mu c_\nu(x) \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, n \\ \mu=1, \dots, n \end{matrix} \right) = r < n. \quad (13.9)$$

如果 $r=0$, 那么 $c(x)$ 是常数, 令 $c=c^0$, 则 $f(x)=V(x, c^0)$.

现在设 $1 \leq r < n$, 根据(13.9), 我们只要适当的调整 c_ν 的下标 r (自然在 $x=x^0$ 的邻域), 就可以假设对 c_1, c_2, \dots, c_r 成立

$$\text{Rk} \left(\partial_\mu c_\nu(x) \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, r \\ \mu=1, \dots, n \end{matrix} \right) = r. \quad (13.10)$$

此外, c_{r+1}, \dots, c_n 是 c_1, \dots, c_r 的函数, 即

$$c_\tau(x) = h_\tau(c_1(x), \dots, c_r(x)), \quad \tau = r+1, \dots, n. \quad (13.11)$$

现在把 (c_1, \dots, c_r) 简单地记作 c_r , 并令

$$V(x, c_r, h_{r+1}(c_r), \dots, h_n(c_r)) = \phi(x, c_r), \quad (13.12)$$

由于 $u = \phi(x, c_r)$ 是(13.2)的解, 所以由(13.6)及(13.11)就有

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \phi(x, c_r(x)), \\ f_{x_\nu}(x) &= \phi_{x_\nu}(x, c_r(x)). \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

正如根据(13.6)可得出(13.7)一样, 根据(13.13)也同样地有

$$\sum_{\rho=1}^r (\phi_{c_\rho})_{c=c(x)} \partial_\nu c_\rho(x) = 0 \quad (\nu=1, \dots, n).$$

由这个式子, 以及(13.10)就得到

$$\text{当 } c=c(x) \text{ 时, } \phi_{c_\rho}(x, c_r) = 0 \quad (\rho=1, \dots, r). \quad (13.14)$$

这时, 如果

$$\left| \phi_{c_\rho c_\sigma}(x^0, c^0) \quad \begin{matrix} \rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, r \end{matrix} \right| \neq 0 \quad (13.15)$$

(参看注意 1), 那么用 (13.14) 就能决定隐函数 c_r , 从而得到 $c_r = c_r(x)$.

反过来, 设 $h_\tau(c_r)(\tau = r+1, \dots, n)$ 是 c_r 的任意函数(仅在适当的范围内), 而用 (13.12) 来定义 $\phi(x, c_r)$, 则 $u = \phi(x, c_r)$ 自然是方程 (13.2) 的解。这时, 如果有满足 (13.15) 以及 $\phi_{c_\rho}(x^0, c_\rho^0) = 0$ 的值 (x^0, c^0) 存在, 那么在 (x^0, c^0) 的邻域中, 由 (13.14) 可以决定 c_r 为 x 的函数: $c_r = c_r(x)$. 把这个函数代到 $\phi(x, c_r)$ 内, 并令 $\phi(x, c_r(x)) = f(x)$, 则根据 (13.14) 可知 (13.13) 成立, 即 $u = f(x)$ 是方程 (13.2) 的解。

以上的结果可简单地述说如下: 首先把 $n-r$ 个 c ($r \geq 1$) 表示成为其余的 r 个 c 的任意函数, 那么由完全解 $u = V(x, c)$ 就能得到仅包含有 r 个任意常数 c_r 的解 $u = \phi(x, c_r)$, 方程 (13.2) 的一般解 $u = f(x)$ 可以作为曲面族 $u = \phi(x, c_r)$ 的包络面而得到。

3. 完全解与奇异解的关系 现在考虑第二种情形, 即在 $x = x^0$ 的邻域有

$$(V_{c_\mu})_{c=c(x)} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n) \quad (13.16)$$

的情形。这时, 设 $c(x^0) = c^0$, 并且设

$$\left| V_{c_\mu c_\nu}(x^0, c^0) \right|_{\substack{\mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n}} \neq 0 \quad (13.17)$$

成立(参看注意 1), $c = c(x)$ 是由 (13.16) 所决定的隐函数。把这种 $c = c(x)$ 代到 $u = V(x, c)$ 中, 就得到了 $u = f(x)$, 于是 $u = f(x)$ 是曲面族 $u = V(x, c)$ 所作的包络面。

反过来, 设曲面族 $u = V(x, c)$ 所作的包络面是 $u = f(x)$. 即对于由 (13.16) 所决定的函数 $c = c(x)$, 有 $V(x, c(x)) = f(x)$, 这时, 很容易得到 (13.6), 从而证明了 $u = f(x)$ 是 (13.2) 的解。此外 $u = f(x)$ 还是 (13.2) 的奇异解。事实上, 首先有

$$F(x, V, V_x) = 0,$$

把这个式子对 c_μ 微分, 則有

$$\left(F_u V_{c_\mu} + \sum_{r=1}^n F_{p_r} V_{x_r c_\mu} \right)_{(u, \gamma) = (V, \gamma_r)} = 0. \quad (13.18)$$

而由 (13.6) 及 (13.16), 就得到

$$\sum_{\nu=1}^n F_{p_\nu}(x, f, f_x) (V_{x_\nu c_\mu})_{c=c(x)} = 0 \quad (\mu=1, \dots, n). \quad (13.19)$$

另一方面, 由 (13.5) 及 (13.16) 我們有

$$\left\{ (V_{x_\mu c_\mu})_{c=c(x)} \quad \begin{matrix} \mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n \end{matrix} \right\} \neq 0,$$

所以由 (13.19) 就得到

$$F_{p_\nu}(x, f, f_x) = 0 \quad (\nu=1, \dots, n), \quad (13.20)$$

故 $u=f(x)$ 是方程 (13.2) 的奇异解。

反过来, 如果 $u=f(x)$ 是 (13.2) 的奇异解, 則 $u=f(x)$ 与 $u=V(x, c)$ 至少有一个公共面素。在这个公共点的邻域, 存在着满足 (13.6) 的 $c=c(x)$ 。故由 (13.18) 与 (13.20) 就有

$$F_u(x, f, f_x) (V_{c_\mu})_{c=c(x)} = 0 \quad (\mu=1, \dots, n).$$

此外, 由于 $u=V$ 的拟正常性 (13.1) 及 (13.20), 有 $F_u(x, f, f_x) \neq 0$ 。所以 $c=c(x)$ 满足 (13.16), 即 $u=f(x)$ 是曲面族 $u=V(x, c)$ 的包絡面。

上面的討論可总结如下: 完全解 $u=V(x, c)$ 的包絡面 $u=f(x)$ 是奇异解。此外, 与 $u=V(x, c)$ 有一个公共面素的奇异解 $u=f(x)$ 是 $u=V(x, c)$ 的包絡面。

本节中所說的事实将在下一节中举例說明。

注意 1 本节的討論, 只要假設 $F(x, u, p)$ 一次可微, $f(x)$ 与 $V(x, c)$ 二次連續可微即可。

为了方便起見, 假設 (13.15) 成立, $c=c(x)$ 是由 (13.14) 所决定的隱函数。但若有 (13.14), 那么就必然成立 (13.15)。为了証明这个事实, 首先我們要証明

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \phi_{c_\rho} & \phi_{x_\nu c_\rho} & \rho=1, \dots, r \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} = r. \quad (13.21)$$

假设矩阵在 $(x, c) = (x^0, c^0)$ 处的秩数 $< r$, 那么存在着 $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$, 使得下式成立

$$\sum_{\rho=1}^r \lambda_\rho \phi_{c_\rho}(x^0, c^0) = 0, \quad \sum_{\rho=1}^r \lambda_\rho \phi_{x_\nu c_\rho}(x^0, c^0) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

这时, 对于 $\tau > r$, 令

$$\lambda_\tau = \sum_{\rho=1}^r \lambda_\rho \partial_\nu h_\tau(c^0) \quad (\tau = r+1, \dots, n),$$

则由 (13.12), 就得到

$$\sum_{\mu=1}^n \lambda_\mu V_{c_\mu}(x^0, c^0) = 0, \quad \sum_{\mu=1}^n \lambda_\mu V_{x_\nu c_\mu}(x^0, c^0) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

但是这个结果与 (13.5) 矛盾, 故 (13.21) 成立。由 (13.14) 及 (13.21) 就有

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \phi_{x_\nu c_\rho} & \rho=1, \dots, r \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} = r. \quad (13.22)$$

又根据 (13.14) (对 x_ν 微分) 有

$$\left(\phi_{x_\nu c_\rho} + \sum_{\sigma=1}^r \phi_{c_\rho c_\sigma} \partial_\nu c_\sigma \right)_{c=c(x)} = 0 \quad \begin{pmatrix} \rho=1, \dots, r \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix}. \quad (13.23)$$

由这个结果就知道

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \phi_{x_\nu c_\rho} & \rho=1, \dots, r \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix}_{c=c(x)} \leq \text{Rk} \begin{pmatrix} \phi_{c_\rho c_\sigma} & \rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, r \end{pmatrix}.$$

再由这个式子与 (13.22) 就有

$$\left| (\phi_{c_\rho c_\sigma})_{c=c(x)} \quad \begin{matrix} \rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, r \end{matrix} \right| \neq 0.$$

完全同样地, 根据 (13.16) 有

$$\left| V_{c_\mu c_\nu}(x, c(x)) \quad \begin{matrix} \mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n \end{matrix} \right| \neq 0.$$

此外由 (13.23) 有

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \phi_{x_\nu c_\rho} & \rho=1, \dots, r \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix}_{c=c(x)} \leq \text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_\nu c_\sigma(x) & \sigma=1, \dots, r \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

由这个式子及 (13.22) 就能得到

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_\nu c_\sigma(x) & \sigma=1, \dots, r \\ \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} = r.$$

对于第二种情形也能同样地证明 ($r = n$).

注意 2 对于以 x 的连续函数作为元素的矩阵, 当

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} a_{ij}(x) & i=1, \dots, l \\ & j=1, \dots, m \end{pmatrix}$$

在 $x=x^0$ 的邻域一定的时候, 这种点 x^0 叫做矩陣的正規点。对于矩陣是正規的点的全体組成一个开集合, 即对于矩陣非正規的点的全体組成一个閉集合。这个集合是离散閉集(即无內点的, 証明从略)。因此在第一种情形中, 这就是說: 除了一个离散閉集以外, 对于任意的点 $x=x^0$, 在 x^0 的邻域中(13.9)成立。自然 r 的值对于不同的点是相异的。

其次, 既不属于第一种情形也不属于第二种情形的点 $x=x^0$ 也組成离散閉集, 因此本节所說的事实, 在除去一个离散閉集以后的空間的各个部分都成立。

若 $f(x)$ 及 $V(x, c)$ 解析正则, 則所除去的閉集合是解析流形。这时, 对于除掉了这个流形以后的点的全体, 可确定它或者属于第一种情形, 而 r 是一定的, 或者属于第二种情形。

§ 14 简单的一阶偏微分方程

我們在本节介紹几类容易求到完全解的偏微分方程。

1. 仅含有 p 的微分方程

$$F(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (p_\nu = \partial_\nu u). \quad (14.1)$$

我們仅討論对于 $F(p)$ 是正常的情形, 即 $\{F_{p_1}, \dots, F_{p_n}\} \neq (0, \dots, 0)$ 的情形[現在拟正常的面素(14.1)全部是正常的], 把(14.1)在 p 空間 E^n 中所决定的 $n-1$ 維流形用参变数表示, 則有

$$p_\nu = \gamma_\nu(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

并且

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \partial_\mu \gamma_\nu(s) & \nu=1, \dots, n \\ & \mu=1, \dots, n-1 \end{pmatrix} = n-1. \quad (14.2)$$

这样, 如果設

$$V(x, c) = \sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu(c_1, \dots, c_{n-1}) x_\nu + c_n, \quad (14.3)$$

則 $u=V(x, c)$ 显然是方程(14.1)的解。此外由(14.2)有

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} V_{c_\mu} & V_{x_\nu c_\mu} & \mu=1, \dots, n \\ & \nu=1, \dots, n \end{pmatrix}$$

$$= \text{Rk} \begin{pmatrix} \sum_{\sigma=1}^n \partial_{\mu} \gamma_{\sigma}(c) x_{\sigma} & \partial_{\mu} \gamma_{\nu}(c) & \mu=1, \dots, n-1 \\ 1 & 0 & \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} \\ = \text{Rk} \left(\partial_{\mu} \gamma_{\nu}(c) \right)_{\substack{\mu=1, \dots, n-1 \\ \nu=1, \dots, n}} + 1 = n.$$

故 $u = V(x, c)$ 是完全解。

現在, 令 $c_n = h(c_1, \dots, c_{n-1})$, 并且設

$$\partial_{\mu} h(c^0) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n-1), \quad (14.4)$$

$$\left| \partial_{\mu\nu}^2 h(c^0) \right|_{\substack{\mu=1, \dots, n-1 \\ \nu=1, \dots, n-1}} \neq 0, \quad (14.5)$$

那么对于 $V(x, c)_{c_n=h(c)} = \phi(x, c_1, \dots, c_{n-1})$, 在 $(x, c) = (x^0, c^0)$ 的邻域(特別在 (x^0, c^0) 处)就有

$$\left| \phi_{c_{\mu} c_{\nu}} \right|_{\substack{\mu=1, \dots, n-1 \\ \nu=1, \dots, n-1}} \neq 0, \quad \phi_{c_{\mu}}(x^0, c^0) = 0.$$

因此,

$$\phi_{c_{\mu}}(x, c) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n-1),$$

从而可以决定隐函数 $c = c(x)$. 把这种 $c = c(x)$ 代入 $u = V(x, c)$ 内, 就得到了 $u = f(x) = V(x, c(x))$, 它就是方程(14.1)的一般解[因为这里的 $h(c)$ 是任意的函数]。

方程(14.1)不具有由完全解的包絡面所形成的奇异解。

2. 变数分离型

$$F \equiv \sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x_{\nu}, p_{\nu}) = 0 \quad (p_{\nu} = \partial_{\nu} u). \quad (14.6)$$

这种形式的方程叫做**变数分离型**的方程。現在假設令

$$u = \sum_{\nu=1}^n y_{\nu}(x_{\nu}) + c, \quad (14.7)$$

由于 $\partial_{\nu} u = y'_{\nu}(x_{\nu})$, 所以有

$$\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x_{\nu}, y'_{\nu}(x_{\nu})) = 0.$$

但因 x_1, \dots, x_n 是相互独立的变数, 所以可設各項都是常数: 即

$$f_\nu(x_\nu, y'_\nu(x_\nu)) = a_\nu, \text{ 而 } \sum_{\nu=1}^n a_\nu = 0. \quad (14.8)$$

現在設

$$\partial_p f_\nu(x_\nu^0, p_\nu^0) \neq 0 \quad (\nu=1, \dots, n), \quad (14.9)$$

于是在 x^0, p^0 的邻域, 可以由 (14.8) 解出 y'_ν , 而有

$$y'_\nu = g_\nu(x_\nu, a_\nu) \quad (\nu=1, \dots, n). \quad (14.10)$$

因此根据 (14.7), 并且取 $a_n = -\sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu$, 則得到

$$u = \sum_{\nu=1}^n \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} g_\nu(x, a_\nu) dx + c = V(x, a_1, \dots, a_{n-1}, c). \quad (14.11)$$

我們还要进一步論証这个解是完全解。首先有

$$V_{x_\nu} = g_\nu(x_\nu, a_\nu), \quad V_c = 1. \quad (14.12)$$

其次, 如果把 (14.10) 代入 (14.8), 因为它成为恒等式, 所以有

$$\partial_p f_\nu(x, p)_{p=g} \cdot \partial_a g_\nu(x, a) = 1,$$

于是由 (14.12), 对于 $\mu=1, \dots, n-1$, 就有

$$V_{x_\nu a_\mu} = \delta_{\mu\nu} \partial_a g_\nu(x_\nu, a_\nu) = \delta_{\mu\nu} (\partial_p f_\nu)^{-1}_{p=g} \\ (\mu=1, \dots, n-1).$$

但是

$$\begin{aligned} \text{Rk} \begin{pmatrix} V_{a\mu} & V_{x_\nu a_\mu} & \mu=1, \dots, n-1 \\ V_c & V_{x_\nu c} & \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} \\ = \text{Rk} \begin{pmatrix} V_{x_\nu a_\mu} & \mu=1, \dots, n-1 \\ & \nu=1, \dots, n \end{pmatrix} + 1 = n \end{aligned}$$

(由于 $V_c=1$, 及 $V_{x_\nu c}=0$), 所以 $u=V(x, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n)$ 是方程的完全解。

由于 (14.6) 的拟正常的解就是正常的解, 所以不存在由完全解的包絡面所形成的奇异解。

例 $\sum_{\nu=1}^n (p_\nu^2 - x_\nu) = 0.$

与 (14.8) 相当的式子是

$$(y_\nu'^2 - x_\nu) = a_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^n a_\nu = 0,$$

所以 $y'_v = \pm \sqrt{x_v + a_v}$, 即 $y_v = \pm \frac{2}{3} (x_v + a_v)^{3/2}$, 于是完全解是

$$u = V = \frac{2}{3} \sum_{v=1}^{n-1} \pm (x_v + c_v)^{3/2} \pm \frac{2}{3} \left(x_n - \sum_{v=1}^{n-1} c_v \right)^{3/2} + c_n.$$

3. Clairaut 微分方程

形如

$$F \equiv u - \sum_{v=1}^n p_v x_v + f(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (14.13)$$

的方程叫做 Clairaut 微分方程。如果令

$$u = V(x, c) = \sum_{v=1}^n c_v x_v - f(c_1, \dots, c_n), \quad (14.14)$$

容易验证, 这个函数就是方程 (14.13) 的解。此外, 由于

$$V_{x_\mu c_\mu} = \delta_{\nu\mu},$$

所以

$$\text{Rk} \left((V_{c_\mu} \quad V_{x_\mu c_\mu} \quad \begin{smallmatrix} \mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n \end{smallmatrix}) \right) = n,$$

即 $u = V(x, c)$ 确是方程的完全解。

再者, 由于 $V_{c_\mu c_\nu} = f_{c_\mu c_\nu}(c)$, 所以当

$$\left| f_{c_\mu c_\nu} \quad \begin{smallmatrix} \mu=1, \dots, n \\ \nu=1, \dots, n \end{smallmatrix} \right| \neq 0 \quad (14.15)$$

时, 从

$$V_{c_\mu} = -x_\mu + f_{c_\mu}(c) = 0 \quad (14.16)$$

可知, 在 x 的适当范围内 [例如在 $x_\mu^0 = f_{c_\mu}(c^0)$ 的邻域], 可以把 c 解出成为 x 的函数 $c = c(x)$. 把它代入 u , 就有

$$u = V(x, c(x)) = f(x),$$

它是 (14.14) 的包络面, 故 $u = f(x)$ 是方程的奇异解。如果利用 (14.16) 不能够具体地把 c 解成 x 的函数, 那么可以把 c 作为参变数而用 s 来代表, 这样我们就得到了奇异解的参变数表示式

$$x_\mu = f_{c_\mu}(s_1, \dots, s_n), \quad u = \sum_{\nu=1}^n s_\nu f_{c_\nu}(s) - f(s),$$

此外, 由于 $F_u = 1$, 所以方程 (14.13) 所有的解都是拟正常的。现在完全解 $u = V(x, c)$ 包含一切满足 (14.13) 的面素, 即 (14.13) 的奇异解是 $u = V(x, c)$ 的包络面, 并且都可以用上面說的方法求得。

习题 1 試闡明求方程 $f_1(x_1, p_1) \cdots f_n(x_n, p_n) = 1$ ($p_i = \partial_i w$) 适当的完全解的方法。

习题 2 求下列方程的适当的完全解及奇异解 (如果存在的话), 其中 x, y 是独立变数, $p = u_x, q = u_y$ 。

- (a) $pq = 1$, (b) $p^2 + q^2 = x + y$,
(c) $xp + yq = p^2 + q^2$, (d) $u = xp + yq + pq$.

§ 15 由完全解导出特征带

1. 把方程直接变成不含 u 的方程 設偏微分方程

$$F(x, u, p) = 0 \quad (p = u_x) \quad (15.1)$$

的完全解是 $u = u(x, c)$, 其中 c 是任意的常数 (在适当范围内), 假设 u 能够作为满足方程

$$w(x, u) = c \quad w_u \neq 0 \quad (15.2)$$

的隐函数而得到, 那么就有

$$u_{x_i} = -(w_{x_i} / w_u)_{u=u(x, c)}, \quad (15.3)$$

把这个式子代入 (15.1), 就得

$$F(x, u, -w_{x_1}/w_u, \dots, -w_{x_n}/w_u) = 0. \quad (15.4)$$

因为 c 是任意的, 所以 (x, u) 都是任意的变数 (在适当的范围内), 如果把它们看成是独立变数, 那么 w 就应该恒等地满足 (15.4)。

反过来, 对于满足方程 (15.4) 的 $w = w(x, u)$, 若是 $w_u \neq 0$, 那么用 (15.2) 所决定的隐函数 $u = u(x, c)$ 就是方程 (15.1) 的解。

现在有这样的一个问题, 就是用这种方法是否能够得到方程 (15.1) 所有的解? 对于这个问题, 我們可以象 § 7 那样来考察, 就

知道方程 (15.1) 所有正常的解都能用这种方法求得。事实上, 設 $u=u(x)$ 是方程 (15.1) 在 $x=x^0$ 处的正常解, 不失去問題的一般性, 允許假定 $F_{p_1}(x^0, u^0, p^0) \neq 0$, 这里 $(u^0, p^0) = \{u, u_x\}(x^0)$, 于是在 $x=x^0$ 的邻域, $u=u(x)$ 就是与方程 (15.1) 等价的基准型方程

$$p_1 = f(x, u, p_2, \dots, p_n) \quad (p_v = u_{x_v}) \quad (15.5)$$

的解。因此, 如果令 $u(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = \phi(x_2, \dots, x_n)$, 則解 $u=u(x)$ 就由初始条件

$$x_1 = x_1^0 \text{ 时, } u = \phi(x_2, \dots, x_n) \quad (15.6)$$

所唯一决定。由于 $u=u(x)$ 满足 (15.5), 所以它也就是方程 (15.1) 的解。

現在令

$$F(x, u, -q_1/q_0, \dots, -q_n/q_0) = \tilde{F}(x, u, q_1, \dots, q_n, q_0),$$

当 $\tilde{F}_{q_1} = -q_0^{-1} F_{p_1} \neq 0$ 时, 方程 (15.4) 根据初始条件 “ $x_1 = x_1^0$ 时, $w = u - \phi(x_2, \dots, x_n)$ ” 所决定的解 $w = w(x, u)$ 是唯一的。这个解由于在 $x = x^0$ 的某一邻域中满足 $w \neq 0$, 所以用方程 $w(x, u) = 0$ 所决定的函数 $u = u(x)$, 就是方程 (15.1) 满足初始条件 (15.6) 的解。

根据以上的討論, 我們恒可以把一阶的偏微分方程直接变换成为不含未知函数的方程 (仅仅独立变数多了一个)。故在以后的討論中, 我們仅考虑不含 u 的方程, 即

$$F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (p_v = \partial_v u). \quad (15.7)$$

对方程 (15.7) 來說, 一切拟正常的解都是正常解。此外, 若 $u = u(x)$ 是 (15.7) 的解, 那么 $u = u(x) + c$ (c 是任意常数) 也是方程 (15.7) 的解。故 (15.7) 的完全解取下面的形式

$$u = W(x_1, c_1, \dots, c_{n-1}) + c_n. \quad (15.8)$$

为了使这样的函数是方程的完全解, 充分而必要的条件是

$u = W(x, c) + c_n$ 是(15.7)的正常解, 即

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} W_{x, c_\rho} & \begin{matrix} \rho+1, \dots, n-1 \\ \nu=1, \dots, n \end{matrix} \end{pmatrix} = n-1. \quad (15.9)$$

2. 由完全解导出特征带 由方程(15.7)的完全解(15.8), 可以用微分法与消去法导出方程(15.7)的特征带. 首先, 令 c_i 为 c_1, \dots, c_{n-1} 的任意函数, 即 $c_n = \alpha(c_1, \dots, c_{n-1})$, 并设

$$W(x, c_1, \dots, c_{n-1}) + \alpha(c_1, \dots, c_{n-1}) = \phi(x, c_1, \dots, c_{n-1}). \quad (15.10)$$

由于 $\phi_{x, c_\rho} = W_{x, c_\rho}$, 所以从(15.9)就有

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} \phi_{x, c_\rho} & \begin{matrix} \rho+1, \dots, n-1 \\ \nu=1, \dots, n \end{matrix} \end{pmatrix} = n-1. \quad (15.11)$$

这样, 当 c 是常数时, 下列的 $n-1$ 个方程

$$\phi_{c_\rho}(x, c) = 0 \quad (\rho = 1, \dots, n-1), \quad (15.12)$$

在空间 E^n 中就决定一条曲线[维数是 $n - (n-1) = 1$ 的流形]:

$$x_\nu = x_\nu(t) \quad (\nu = 1, \dots, n), \quad (15.13)$$

这里, t 是曲线的参变数。

如果令

$$\phi(x(t), c) = u(t), \quad \phi_{x_\nu}(x(t), c) = p_\nu(t), \quad (15.14)$$

现在我们来证明, $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$ 就是方程(15.7)的特征带。

首先, 由于(15.13)满足(15.12), 因此把它们代入(15.12), 然后再对 t 微分, 就得到

$$\sum_{\nu=1}^n (\phi_{x_\nu c_\rho})_{x=x(t)} x'_\nu(t) = 0 \quad (\rho = 1, \dots, n-1). \quad (15.15)$$

此外, 由于 $u = \phi(x, c)$ 是方程(15.7)的解, 把它代入(15.7)并对 c_ρ 微分, 就得到

$$\sum_{\nu=1}^n (F_{p_\nu})_{p=p(t)} \phi_{x_\nu c_\rho} = 0.$$

但是由(15.14), 上式可写成

$$\sum_{i=1}^n (\phi_{x_i c_\rho})_{x=x(t)} (F'_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)} = 0$$

$$(\rho=1, \dots, n-1), \quad (15.16)$$

把它和方程 (15.15) 比較. 因为我們可以把它們看成是同样以 $(\phi_{x_i c_\rho})_{x=x(t)}$ 为系数的联立一次方程組, 并且由于 (15.11) 成立, 所以 (15.15) 的解 $x'_\nu(t)$ 必需与 (15.16) 的解 $(F'_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}$ 成比例. 这表示 (由于 F' 的正常性) 存在一个数量函数 $\lambda(t)$, 使得

$$x'_\nu(t) = \lambda(t) (F'_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)} \quad (\nu=1, \dots, n), \quad (15.17)$$

因此由 (15.14) 及 (15.17), 容易地得出

$$u'(t) = \lambda(t) \sum_{\nu=1}^n (p_\nu F'_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}. \quad (15.18)$$

此外, 由于 $u = \phi(x, c)$ 是 (15.7) 的解, 对 x_ν 微分后, 有

$$\left\{ F'_{x_\nu} + \sum_{\mu=1}^n F'_{p_\mu} \phi_{x_\mu x_\nu} \right\}_{p=\phi_x} = 0. \quad (15.19)$$

另一方面, 由 (15.14) 及 (15.17) 有

$$p'_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^n (\phi_{x_\mu x_\nu})_{x=x(t)} x'_\mu(t) = \lambda(t) \sum_{\mu=1}^n (F'_{p_\mu} \phi_{x_\mu x_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)},$$

故由 (15.19) 得到

$$p'_\nu(t) = -\lambda(t) (F'_{x_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}. \quad (15.20)$$

綜合 (15.17), (15.18) 及 (15.20) 就得到

$$\frac{dx_\nu}{F'_{p_\nu}} = \frac{du}{\sum_{\nu=1}^n p_\nu F'_{p_\nu}} = \frac{dp_\nu}{-F'_{x_\nu}} = \lambda dt, \quad (15.21)$$

即 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$ 是方程 (15.7) 的特征带。

因为在 (15.10) 中 $\alpha(c_1, \dots, c_{n-1})$ 是任意的函数, 所以只要适当地选择这个函数, 就能够得到 (15.7) 的一般特征带。为了說明这一点, 譬如我們看一看当

$$\alpha(c_1, \dots, c_{n-1}) = -\sum_{\rho=1}^{n-1} b_\rho c_\rho + a \quad (15.22)$$

的情形。这时(15.12)成为

$$W_{c_\rho}(x, c) - b_\rho = 0. \quad (15.23)$$

对于任意一个满足方程(15.7)的面素 (x^0, u^0, p^0) , 成立着决定 c^0 的方程组

$$\left. \begin{aligned} W(x^0, c^0) + c_n^0 &= u^0, \\ W_{x_\nu}(x^0, c^0) &= p_\nu^0. \end{aligned} \right\} \quad (15.24)$$

由于(15.8)是方程的完全解, 所以当 (x^0, u^0, p^0) 在适当范围内的时候, 利用上式就可以完全决定 c^0 . 于是由(15.23)可以决定 $b_\rho = W_{c_\rho}(x^0, c^0)$. 最后利用

$$-\sum_{\rho=1}^{n-1} b_\rho c_\rho^0 + a = c_n^0$$

可以决定 a . 这样就得到了包含任意面素 (x^0, u^0, p^0) 的特征带。

为了简单起见, 本节仅讨论了 P' 中不含 u 的情形, 至于 P' 含有 u 的情形, 可以用同样的方法由完全解来求出特征带。

注意 现在证明一下, 方程(15.7)具有形式如(15.8)的完全解。设 (x^0, u^0, p^0) 是方程(15.7)任意的正常面素 (u^0 的值完全任意), 不失去一般性可以假设 $F_{p_n}(x^0, p^0) \neq 0$, 于是在 (x, u, p) 空间中点 (x^0, u^0, p^0) 的适当邻域, 可以得到与(15.7)等价的基准型方程

$$p_1 = f(x, p_2, \dots, p_n) \quad (p_n = \partial_x u).$$

对于和 $(c_1, \dots, c_{n-1}) = (p_2^0, \dots, p_n^0)$ 邻近的任意的 c , 这个方程具有初始条件

$$x_1 = x_1^0 \text{ 时, } u = \sum_{\rho=1}^{n-1} c_\rho (x_{\rho+1}^0 - x_{\rho+1}^0) + u^0$$

所决定的解 $u = W(x, c_1, \dots, c_{n-1})$. 对于这个解, 由于成立诸关系式

$$\begin{aligned} (W_{x_{\rho+1}})_{x_1=x_1^0} &= c_\rho, \quad (W_{x_{\rho+1}})_{x_1=x_1^0} - x_1^0 = \delta_{\rho\sigma} \\ (\rho, \sigma &= 1, \dots, n-1), \end{aligned}$$

所以满足(15.9)中的条件。

§ 16 Hamilton-Jacobi 偏微分方程

1. Hamilton 正则方程 设 $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ 是独立

变数,关于 $w=w(t, x)$ 的偏微分方程

$$\partial_t w + H(t, x, p_1, \dots, p_m) = 0 \quad (p_\nu = w_{x_\nu}), \quad (16.1)$$

叫做 Hamilton-Jacobi 偏微分方程。它的特征微分方程组是

$$\frac{d}{dt} x_\nu = H_{p_\nu}, \quad \frac{d}{dt} p_\nu = -H_{x_\nu} \quad (\nu=1, \dots, m), \quad (16.2)$$

$$\frac{d}{dt} w = \sum_{\nu=1}^m p_\nu H_{p_\nu} - H, \quad \frac{d}{dt} p_0 = -H_t, \quad (16.3)$$

这里 t 是独立变数,并且 $\partial_t w = p_0$. 因为 (16.1) 可以写成 $F \equiv \dot{f}_0 + H = 0$, 即 $p_0 = -H$, 所以有 $\sum_{\nu=0}^m p_\nu \dot{x}_\nu = \sum_{\nu=1}^m p_\nu H_{p_\nu} - H$.

因为 H 不含有 w , 所以方程组 (16.2) 可以看成是仅仅含有 (x, p) 的联立微分方程组。这组方程叫做 **Hamilton 正则方程**, 它是力学与变分学中重要的微分方程。

因为 (16.2) 的解是方程 (16.1) 的特征带, 所以可使用前节的方法 ($n=m+1$), 设

$$w = W(t, x, c_1, \dots, c_m) + c_{m+1}, \quad (16.4)$$

$$\left| W_{x_\nu c_\mu} \begin{matrix} \mu=1, \dots, m \\ \nu=1, \dots, m \end{matrix} \right| \neq 0 \quad (16.5)$$

是用上一节的方法所得到的完全解; 于是与 (15.23) 相当的式子是

$$W_{c_\mu}(t, x, c) = b_\mu \quad (\mu=1, \dots, m), \quad (16.6)$$

现在把 $x_\nu = x_\nu(t)$ 代入, 并令

$$W_{x_\nu}(t, x(t), c) = p_\nu(t) \quad (\nu=1, \dots, m), \quad (16.7)$$

则由 (16.3) 就能得到 w ,

$$w(t) = \int \left(\sum_{\nu=1}^m p_\nu \dot{x}_\nu - H \right)_{(x,p)=(x,p)(t)} dt. \quad (16.8)$$

下面我们举几个典型的应用例题。

2. 中心力场中质点的运动方程 古典力学中关于静止坐标系的质点运动方程是

$$\frac{d}{dt} x_\nu = H_{p_\nu} = \frac{1}{m} p_\nu, \quad \frac{d}{dt} p_\nu = -H_{x_\nu} = -U_{x_\nu}(x) \\ (\nu = 1, \dots, n),$$

其中

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{\nu=1}^n p_\nu^2 + U(x) \quad (m \text{ 是質点的质量}),$$

U 是位能 (普通 $n=2$, 或是 $=3$)。

如果使用平面极坐标, 則 $(x_1, x_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, 而 $U(x)$ 在中心力場的情形下, 是仅与 r 有关的函数, 即 $U = g(r)$ 。这样, 經過简单的换算, 容易得到

$$H = \frac{1}{2m} (w_r^2 + r^{-2} w_\theta^2) + g(r). \quad (16.9)$$

因此 Hamilton-Jacobi 微分方程是

$$\partial_t w + \frac{1}{2m} (w_r^2 + r^{-2} w_\theta^2) + g(r) = 0. \quad (16.10)$$

为了求这个方程的完全解, 我們設

$$w = W = -at + b\theta + \phi(r), \quad (16.11)$$

把它代入 (16.10) (由于 a, b 是常数), 就得到

$$-a + \frac{1}{2m} (\phi'(r)^2 + b^2 r^{-2}) + g(r) = 0,$$

于是有

$$\phi(r, a, b) = \pm \int \sqrt{2ma - 2mg(r) - b^2 r^{-2}} dr. \quad (16.12)$$

如果在 (16.11) 中令

$$W_a = c, \quad W_b = c',$$

那么就得到

$$-t + \phi_a(r, a, b) = c, \quad \theta + \phi_b(r, a, b) = c',$$

所以对于 (16.12) 的 ϕ , 我們得到了有关于 t 及 θ 的公式

$$\left. \begin{aligned} t &= -m \int (2ma - 2mg(r) - b^2 r^{-2})^{-1/2} dr - c, \\ \theta &= m \int b r^{-2} (2ma - 2mg(r) - b^2 r^{-2})^{-1/2} dr + c'. \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

习题1 对于(16.11)的●, 成立着

$$\begin{vmatrix} W_{\theta a} & W_{\theta b} \\ W_{ra} & W_{rb} \end{vmatrix} = \pm \frac{m}{\sqrt{2ma - 2mg - b^2 r^{-2}}} \neq 0,$$

讨论一下用(16.11)所求的解是完全解的条件。

习题2 设 $g(r) = kr^{-1}$ (k 常数), 计算(16.13)。

3. 曲面的测地线 设已知以 u, v 为参数的曲面方程 (三维空间的二维流形) 为

$$(x, y, z) = \{X, Y, Z\}(u, v).$$

对于曲面上的曲线, 即以曲面坐标 (u, v) 所表示的方程 $(u, v) = \{u, v\}(t)$, 它的弧长是

$$S = \int \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt,$$

这里,

$$E = X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2, \quad G = X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2,$$

$$F = X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v.$$

这时, 曲面的测地线就是下列 Hamilton 正则方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= H_p, & \frac{dv}{dt} &= H_q, \\ \frac{dp}{dt} &= -H_u, & \frac{dq}{dt} &= -H_v \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

的解, 这里

$$H = \frac{1}{2}(EG - F^2)^{-1}(Gp^2 - 2Fpq + Eq^2) \quad (16.15)$$

(我们在这里把 x_1, x_2, p_1, p_2 , 写成 u, v, p, q).

正则方程所对应的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程是

$$w_t + \frac{1}{2}(EG - F^2)^{-1}(Gw_u^2 - 2Fw_u w_v + Ew_v^2) = 0. \quad (16.16)$$

如果能得到满足条件

$$\begin{vmatrix} W_{u,a} & W_{v,a} \\ W_{u,b} & W_{v,b} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (16.17)$$

的完全解 $w = W(t, u, v, a, b) + c$, 則由

$$W_a = c, \quad W_b = c' \quad (16.18)$$

就能够求得測地綫方程 $(u, v) = \{u, v\}(t)$.

現在試令

$$W = -\frac{a^2}{2}t + a\psi(u, v, b) \quad (a \neq 0). \quad (16.19)$$

設 $w = W$, 并把它代入方程 (16.16), 則有

$$G\psi_u^2 - 2F\psi_u\psi_v + E\psi_v^2 = EG - F^2. \quad (16.20)$$

对于这个解 ψ , (16.18) 就成为

$$W_a = -at + \psi, \quad W_b = a\psi_b, \quad (16.21)$$

因此条件 (16.17), 当 $a \neq 0$ 时, 就是

$$\begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \psi_{u,b} & \psi_{v,b} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (16.22)$$

因此我們只要求出方程 (16.20) 滿足条件 (16.22) 的解即可. 又因为測地綫与参变数的选择无关, 所以由 (16.18) 的第二个式子 (滿足 (16.21)) 就得到測地綫方程

$$\psi_b(u, v, b) = C. \quad (16.23)$$

作为例題, 我們考虑一下回轉曲面 (以 z 軸为回轉軸)

$$(x, y, z) = \{f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)\}, \quad (16.24)$$

这里

$$E = f'(u)^2 + g'(u)^2, \quad F = 0, \quad G = f(u)^2,$$

所以現在的方程 (16.20) 是

$$G(u)\psi_u^2 + E(u)\psi_v^2 = E(u)G(u). \quad (16.25)$$

把

$$\psi = \varphi(u) - bv \quad (16.26)$$

代入方程, 就得到

$$\varphi'(u) = \pm \sqrt{E(u)(1 - b^2 G(u))}. \quad (16.27)$$

于是由 (16.23) 及 (16.26), 又得到

$$v = \mp b \int \frac{\sqrt{E}/G}{1-b^2/G} du + C, \quad (16.28)$$

它就是曲面(16.24)的测地线的方程。

习题3 对于满足(16.25)而形式如(16.26)的解,讨论一下条件(16.22)成立与否的情形。

习题4 求下列各曲面 $[(u, v)$ 是参变数]的测地线。

(a) $(x, y, z) = \{\operatorname{ch} u \cdot \cos v, \operatorname{ch} u \cdot \sin v, u\}$

$$\left(\operatorname{ch} u = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u}) \right) \text{ (回转 Catulon 曲面)}.$$

(b) $(x, y, z) = \{v \cos u, v \sin u, u\}$ (螺旋面)。

(c) $x = \pm a \sqrt{(u-a^2)(v-a^2)(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$

$$y = \pm b \sqrt{(u-b^2)(v-b^2)(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z = \pm c \sqrt{(u-c^2)(v-c^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$$

$$(c^2 < v < b^2 < u < a^2)$$

$$\left(\text{椭圆面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right).$$

§ 17 初始值问题的解的唯一性

1. Haar 不等式 在§11及§12中,我们假设了一阶偏微分方程的解至少二次连续可微,并在这样的假设下讨论了初始值问题。但是,当初始条件是二次连续可微时,除了二次连续可微的解以外,是否还存在着一次连续可微的解呢?对于这个理论性的问题, A. Haar 指出,仅在假设解是一次连续可微的条件下能证明满足已给初始条件的解是唯一的。

首先设独立变数中有一个是时间变数,并把它记作 x , 而其余的独立变数是 $y = (y_1, \dots, y_m)$ 。我们考虑基准型偏微分方程

$$\partial_x u = f(x, y, u, p_1, \dots, p_m) \quad (p_v = \partial_{y_v} u), \quad * (17.1)$$

设这个方程具有两个满足条件“当 $x=a$ 时, $u = \beta(y_1, \dots, y_m)$ ”的解 $u_1(x, y)$ 及 $u_2(x, y)$, 作它们的差 $u_2 - u_1 = v$, 则 v 所满足的方程是

$$\partial_x v = f(x, y, u_1 + v, \partial_y(u_1 + v)) - f(x, y, u_1, \partial_y u_1).$$

但是另一方面,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \partial_\theta f(x, y, u_1 + \theta v, \partial_y(u_1 + \theta v)) d\theta \\ &= \phi_0(x, y)v + \sum_{\mu=1}^m \phi_\mu(x, y) \partial_\mu v \quad (\partial_\mu = \partial_{y_\mu}), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \int_0^1 f_u(x, y, u_1 + \theta v, \partial_y(u_1 + \theta v)) d\theta, \\ \phi_\mu &= \int_0^1 f_{y_\mu}(x, y, u_1 + \theta v, \partial_y(u_1 + \theta v)) d\theta \end{aligned}$$

[假設 $f(x, y, u, p)$ 及 $u(x, y)$ 都是一次連續可微的]。所以在 (x, y) 的适当範圍中, 成立着下面的关系

$$|\partial_x v| \leq A \sum_{\mu=1}^m |\partial_\mu v| + B|v|, \quad v(a, y) = 0, \quad (17.2)$$

其中 A, B 是正的常数。于是現在的問題化成: 如果在适当的範圍內 (17.2) 成立的話, 那么要証明在这个範圍內 $v(x, y) = 0$, 为了証明这个事实, Haar 首先証明了下面的定理。

定理 17.1 設在範圍 $D = \{(x, y); 0 \leq x, y_\mu \leq l - Ax\}$ 內 $v(x, y)$ 連續可微, 并且下列条件成立:

$$|v(0, y)| < M, \quad (17.3)$$

$$|\partial_x v| < A \sum_{\mu=1}^m |\partial_\mu v| + B|v| + C \quad (A, B, C \geq 0), \quad (17.4)$$

那么在整個 D 內, 就成立着下面的关系

$$|v(x, y)| < Me^{Bx} + \frac{C}{B}(e^{Bx} - 1). \quad (17.5)$$

証明 現在令

$$v = e^{Bx}w + \frac{C}{B}(e^{Bx} - 1), \quad (17.6)$$

于是只要証明在 D 中 $|w| < M$ 即可。首先, 由 (17.4) 及 (17.6) 有

$$|\partial_x w + Bw + C| < A \sum_{\mu=1}^m |\partial_\mu w| + B \left| w + \frac{C}{B} (1 - e^{-Bx}) \right| + Ce^{-Bx},$$

即在 D 中有

$$\partial_x w + Bw < A \sum_{\mu=1}^m |\partial_\mu w| + B|w|. \quad (17.7)$$

又由 (17.3) 及 (17.6) 有

$$w(0, y) < M. \quad (17.8)$$

但是如果 $x > 0$ 相当小, 那么, 由 (17.8) 就能有 $w(x, y) < M$. 如果现在对全部 D 中的点并不总有 $w < M$, 即存在着 (x, y) , 使得 $w(x, y) \geq M$. 这样, 令

$$\xi = \inf\{x; (x, y) \in D, w(x, y) \geq M\}, \quad (17.9)$$

显然 $\xi > 0$.

又由 (17.9) 有

$$0 \leq x < \xi, (x, y) \in D \text{ 时}, w(x, y) < M. \quad (17.10)$$

此外, 由于 $w(x, y)$ 的连续性, 还存在着这样的 η , 使得

$$(\xi, \eta) \in D, w(\xi, \eta) = M. \quad (17.11)$$

于是设 $\varepsilon_\mu = \pm 1$, 并且规定

当 $\partial_\mu w(\xi, \eta) \geq 0$ 时, $\varepsilon_\mu = 1$,

当 $\partial_\mu w(\xi, \eta) < 0$ 时, $\varepsilon_\mu = -1$.

现在考虑空间 E^{m+1} 中一段完全落在 D 内的线段

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \xi, \quad y_\mu &= \eta_\mu - \varepsilon_\mu A(x - \xi) = \bar{y}_\mu(x) \\ (\mu &= 1, \dots, m). \end{aligned}$$

设 w 沿着这一线段的值是 \bar{w} , 并且引入记法

$$\bar{w}(x) = w(x, \bar{y}(x)),$$

则由 (17.10) 及 (17.11) 就有

当 $0 \leq x < \xi$ 时, $\bar{w}(x) < M$, $\bar{w}(\xi) = M$.

即 $\bar{w}'(\xi) \geq 0$. 但是另一方面, 由于上面所规定的 $\bar{y}(x)$, ε_μ 的定义, 有

$$\begin{aligned}\bar{w}'(\xi) &= \left(\partial_x w + \sum_{\mu=1}^m \partial_\mu w \bar{y}'_\mu \right)_{(x,y)=(\xi,\eta)} \\ &= \left(\partial_x w - A \sum_{\mu=1}^m \partial_\mu w \right)_{(x,y)=(\xi,\eta)}.\end{aligned}$$

因此

$$\left(\partial_x w - A \sum_{\mu=1}^m \partial_\mu w \right)_{(x,y)=(\xi,\eta)} \geq 0. \quad (17.12)$$

此外, 由于 $w(\xi, \eta) = M = |w(\xi, \eta)|$, 所以从 (17.12), 我们就得到

$$(\partial_x w + Bw)_{(x,y)=(\xi,\eta)} \geq \left(A \sum_{\mu=1}^m |\partial_\mu w| + B|w| \right)_{(x,y)=(\xi,\eta)}.$$

这个结果与 (17.7) 矛盾。矛盾发生的原因是由于作了在 D 中存在着 (x, y) , 使得 $w(x, y) = M$ 的假定而引起的。所以在全部的 D 中有 $w(x, y) < M$ 。如果代替 w 而考虑 $-w$, 则有 $w(x, y) > -M$ 。 証毕

现在利用定理 17.1, 我们可以由 (17.2) 来证明, 在适当的范围内 $\phi(x, y) = 0$ 。

不失去问题的一般性, 可以在 $(x, y) = (0, 0)$ 的某一邻域来讨论, 所以可取 $a = 0$ 。其次, 设 D 包含在这个邻域之内 (即 l 相当地小)。由于 (17.2), 对于任意小的 $\varepsilon > 0$, 恒有

$$|\partial_x v| \leq A \sum_{\mu=1}^m |\partial_\mu v| + B|v| + \varepsilon, \quad |(x, y)| \leq \varepsilon.$$

故根据定理 17.1, 在全部的 D 内有

$$|v(x, y)| \leq \varepsilon e^{Bx} + \frac{\varepsilon}{B}(e^{Bx} - 1).$$

取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限后, 就得到

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

如果取 $-x$ 代替 x 来讨论的话, 则有下列的结果: 当 $x = 0$, $|y_\mu| \leq l - A|x|$ 时, $v(x, y)$ 也等于 0。

2. 一般 Cauchy 問題的解的唯一性 令独立变数为 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 并令 $p = (p_1, \dots, p_n)$, 我們討論非基准型偏微分方程

$$F(x, u, p) = 0 \quad (p_\nu = \partial_\nu u), \quad (17.13)$$

它的初始面素組 $(x, u, p) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s_1, \dots, s_{n-1})$ 應該滿足 (17.13) 以及

$$\left| F_{p_\mu}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \partial_\rho \alpha_\mu \quad \begin{matrix} \mu=1, \dots, n \\ \rho=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \neq 0. \quad (17.14)$$

首先假設对

$$\bar{x}_\nu = \bar{x}_\nu(x) \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

成立

$$\frac{D(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0, \quad (17.15)$$

則这变换把独立变数 x 变成 \bar{x} . 如果以 ∂_μ 表示对 x_μ 的微分, 那么就記号 $\bar{\partial}_\nu$ 表示对 \bar{x}_ν 的微分. 再令

$$p_\mu = \bar{\partial}_\mu u, \quad \bar{p}_\nu = \bar{\partial}_\nu u,$$

則有

$$p_\mu = \sum_{\nu=1}^n \partial_\mu \bar{x}_\nu \bar{p}_\nu.$$

但是, 如果令 $F(x, u, p) = \bar{F}(\bar{x}, u, \bar{p})$, 那么还有

$$\bar{F}_{p_\nu} = \sum_{\mu=1}^n \partial_\mu \bar{x}_\nu F_{p_\mu}. \quad (17.16)$$

另一方面, 因为 $x = \alpha(s)$ 变成了 $\bar{x} = \bar{\alpha}(s)$, 所以有

$$\partial_\rho \bar{\alpha}_\nu(s) = \sum_{\mu=1}^n \partial_\mu \bar{x}_\nu \partial_\rho \alpha_\mu(s). \quad (17.17)$$

因此, 由 (17.16) 及 (17.17) 可得

$$\left| \bar{F}_{\bar{p}_\nu}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \quad \partial_\rho \bar{\alpha}_\nu \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, n \\ \rho=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \\ = \frac{D(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \left| F_{p_\mu}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \partial_\rho \alpha_\mu \quad \begin{matrix} \mu=1, \dots, n \\ \rho=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right|.$$

結果, 根据 (17.14), (17.15) 就有

$$\left| \bar{F}_{\bar{p}_\nu}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \quad \partial_{\bar{p}} \bar{\alpha}_\nu \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, n \\ \rho=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \neq 0. \quad (17.18)$$

現在任意地取 $s=s^0$, 并且由于 (17.14), 不失問題的一般性, 可以假設

$$\left| \partial_{\bar{p}} \alpha_\mu(s^0) \quad \begin{matrix} \mu=2, \dots, n \\ \rho=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| \neq 0. \quad (17.19)$$

这样, 我們取

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + \alpha_1(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \\ x_\mu &= \alpha_\mu(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (\mu=2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

并令 $\bar{x}^0 = (0, s_1^0, \dots, s_{n-1}^0)$, 則由 (17.20) 及 (17.19), 就有

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(x_1, \dots, x_n)_{\bar{x}=\bar{x}^0}} = \partial_{\bar{p}} \alpha_\mu(s^0) \quad \begin{matrix} \mu=2, \dots, n \\ \rho=1, \dots, n-1 \end{matrix} \neq 0.$$

所以利用 (17.20), 就使 $\bar{x}=\bar{x}^0$ 的邻域与 $x=x^0=\alpha(s^0)$ 的某一个邻域成一对一的对应。于是 x 就是 \bar{x} 的連續可微的函数。从而可以把独立变数 x 变成独立变数 \bar{x} , 而 $x=\alpha(s)$ 就变为

$$x_1 = \bar{\alpha}_1(s) \equiv 0, \quad \bar{x}_{\nu+1} = \bar{\alpha}_{\nu+1}(s) \equiv s_\nu \quad (\nu=1, \dots, n-1).$$

但是根据 (17.18) 有

$$\left| \bar{F}_{\bar{p}_\nu} \quad \partial_{\bar{p}} \bar{\alpha}_\nu \quad \begin{matrix} \nu=1, \dots, n \\ \rho=1, \dots, n-1 \end{matrix} \right| = \bar{F}_{\bar{p}_1} \neq 0.$$

这样, 和 $(x, u, p) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s^0)$ 邻近的面素满足与 (17.13) 对应的方程, 即方程

$$\bar{F}(\bar{x}, u, \bar{p}) = 0.$$

在其中, 可以把 p_1 解出, 从而得到和它等价的基准型方程

$$\bar{p}_1 = f(\bar{x}, u, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n),$$

并且使初始条件变成

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ 时, } u = \beta(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

最后, 連同前面对基准型方程所得到的結果, 就証明了下面的定理。

定理 17.2 設 $H(x, u, p)$ 在 (x^0, u^0, p^0) 的某一邻域連續可微, 而面素組 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 在滿足 $(x^0, u^0, p^0) = \{\alpha, \beta, \gamma\}(s^0)$ 的某一 s^0 值的邻域連續可微。此外假設 (17.14) 成立。这样, 在 $x = x^0$ 的适当邻域, 方程 (17.13) 含有面素組 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 的一次連續可微的解是唯一的。

注意 关于定理 17.2, 函数 $\gamma(s)$ 无需假設微分可能性, 只要是連續函数即可。

定理 17.2 仅仅断言在 $x = x^0$ 适当的邻域方程解的唯一性。但是一般不可能把这种結果擴張到解所存在的全部区域中去。譬如基准型方程 (齐次綫性, x, y 是独立变数)

$$\partial_x u = -2y \partial_y u \quad (17.21)$$

的一般解是 $u = f(y^{-2} - x)$ (其中 f 是任意函数)。这里如果規定

$$x \leq y^{-2} \text{ 时, } u(x, y) = 0,$$

$$x > y^{-2} \text{ 时, } u(x, y) = c(y^{-2} - x)^{k+1} \quad (k \text{ 自然数})$$

($c \neq 0$ 常数), 那么容易証明, $u(x, y)$ 在全平面上是方程 (17.21) 的 k 次連續可微的解, 并且滿足初始条件 $u(0, y) = 0$ 。这就說明了对于同一初始条件, 解的唯一性是限制在某一个范围中的。此外, 还可举出和上面类似的, 但 $u(x, y)$ 是无限次連續可微的例子。

第4章 两个独立变数的二阶 偏微分方程和方程組

对于一阶偏微分方程,我們以常微分方程为基础,可通过特征曲线及特征带来建立方程的积分理論。但是对于高阶的或是联立的偏微分方程,即使在方程都是綫性的简单情形下,一般就没有这种統一的处理方法。理由很简单,用一句話來說,就是这时特征体可能是实的,也可能是虛的,这将由解的本質来确定。因此一般不可能通过特征体用化成常微分方程組的方法来处理問題。

虽是这样,但在两个变数的情形,問題还是容易解决,处理的方法也很简单。过去对这方面的問題已經作过仔細研究,因此本章將就半綫性的情形作一简单的介紹。我們的討論以双曲型方程为主,对椭圆型的情形只讲解調和函数,至于其他的内容則留在后面几章詳細讲。在本章中仍假設所有的函数在变数的适当区域(区域的維数等于独立变数的个数)中,具有适当次数的連續可微性;所討論的变数与函数,也并不規定它們一定是实的。

§ 18 二阶半綫性方程的标准型

設 x, y 为独立变数, u 为 (x, y) 的未知函数,考虑下列的二阶半綫性偏微分方程

$$a\partial_{xx}^2u + 2b\partial_{xy}^2u + c\partial_{yy}^2u = f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u), \quad (18.1)$$

这里

$$(a, b, c) = \{a, b, c\}(x, y).$$

现在适当地选择二个函数 $\xi(x, y)$ 与 $\eta(x, y)$, 并把独立变数由 (x, y) 变成 (ξ, η) , 則有

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= \partial_\xi u \cdot \xi_x + \partial_\eta u \cdot \eta_x, \quad \partial_y u = \partial_\xi u \cdot \xi_y + \partial_\eta u \cdot \eta_y, \\
\partial_{xx}^2 u &= \partial_{\xi\xi}^2 u \cdot \xi_x^2 + 2\partial_{\xi\eta}^2 u \cdot \xi_x \eta_x + \partial_{\eta\eta}^2 u \cdot \eta_x^2 \\
&\quad + (\partial_\xi u \cdot \xi_{xx} + \partial_\eta u \cdot \eta_{xx}), \\
\partial_{xy}^2 u &= \partial_{\xi\xi}^2 u \cdot \xi_x \xi_y + \partial_{\xi\eta}^2 u \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + \partial_{\eta\eta}^2 u \cdot \eta_x \eta_y \\
&\quad + (\partial_\xi u \cdot \xi_{xy} + \partial_\eta u \cdot \eta_{xy}), \\
\partial_{yy}^2 u &= \partial_{\xi\xi}^2 u \cdot \xi_y^2 + 2\partial_{\xi\eta}^2 u \cdot \xi_y \eta_y + \partial_{\eta\eta}^2 u \cdot \eta_y^2 \\
&\quad + (\partial_\xi u \cdot \xi_{yy} + \partial_\eta u \cdot \eta_{yy}).
\end{aligned}$$

于是(18.1)就变成

$$A\partial_{\xi\xi}^2 u + 2B\partial_{\xi\eta}^2 u + C\partial_{\eta\eta}^2 u = g(\xi, \eta, u, \partial_\xi u, \partial_\eta u). \quad (18.2)$$

现在对 (x, y) 的任意函数 φ, ψ , 引入下面的记号

$$Q(\varphi, \psi) = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y, \quad (18.3)$$

这样就可以把 A, B, C 写成

$$A = Q(\xi, \xi), \quad B = Q(\xi, \eta), \quad C = Q(\eta, \eta). \quad (18.4)$$

现在试适当的选择 (x, y) 的函数 ξ 与 η , 使得(18.2)的主部(即左边)化成最简单的形状。为此, 先讨论一下下列 λ 的二次方程

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0, \quad (18.5)$$

并设 $a \neq 0$ 。根据(18.5)的判别式的符号可以分成三种情形进行讨论。

1. 双曲型 $ac - b^2 < 0$ 的情形。

这时, (18.5)具有相异的实根, 设两根为 $\lambda = \lambda_1(x, y)$ 及 $\lambda_2(x, y)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则由

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

而有

$$Q(\varphi, \varphi) = a(\varphi_x - \lambda_1\varphi_y)(\varphi_x - \lambda_2\varphi_y). \quad (18.6)$$

于是如果设 ξ, η 分别是下列一阶偏微分方程

$$\left. \begin{aligned} \xi_x - \lambda_1(x, y)\xi_y &= 0, \\ \eta_x - \lambda_2(x, y)\eta_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

的解,并且 $\xi_y \eta_y \neq 0$ 的话,那么由(18.7)有

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \xi_y \eta_y \neq 0, \quad (18.8)$$

故允许以 (ξ, η) 代替 (x, y) 作为独立变数,并由(18.4), (18.6), (18.7)有

$$A = Q(\xi, \xi) = 0, \quad C = Q(\eta, \eta) = 0. \quad (18.9)$$

此外,利用(18.7)及 $\lambda_1 + \lambda_2 = -2b/a$, $\lambda_1 \lambda_2 = c/a$, 则有

$$\begin{aligned} B = Q(\xi, \eta) &= \{a\lambda_1 \lambda_2 + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\} \xi_y \eta_y \\ &= 2a^{-1} \cdot (ac - b^2) \xi_y \eta_y \neq 0. \end{aligned}$$

于是由(18.2), (18.9)就得到了标准方程

$$\partial_{\xi\eta}^2 u = g_1(\xi, \eta, u, \partial_{\xi} u, \partial_{\eta} u). \quad (18.10)$$

另外,如果设 $\xi = X + Y$, $\eta = X - Y$, 那么还可以变成下列的形式

$$\partial_{XX}^2 u - \partial_{YY}^2 u = \phi(X, Y, u, \partial_X u, \partial_Y u). \quad (18.11)$$

2. 椭圆型 $ac - b^2 > 0$ 的情形。

这时(18.5)无实根,两根为共轭复数。由于(18.7)中的 λ_1, λ_2 具有复数值,所以不能在实数的范围中研究它的特征曲线。因此有必要把独立变数当作复变数来考虑。即把原来看作实变数 (x, y) 的解析正则函数 a, b, c 加以扩张,考虑为复变数 (x, y) 的正则函数。

$$\text{设} \quad \xi = X + iY, \quad \eta = X - iY \quad (i^2 = -1), \quad (18.12)$$

由于 $\partial_x = \partial_{\xi} + \partial_{\eta}$, $\partial_y = i(\partial_{\xi} - \partial_{\eta})$, 所以

$$\partial_{\xi\eta}^2 u = \frac{1}{4}(\partial_{XX}^2 u + \partial_{YY}^2 u) = \frac{1}{4} \Delta u. \quad (18.13)$$

在上面的变换中,由于当 (x, y) 是实数时, λ_1 与 λ_2 是共轭复数,所以(18.7)中的解 ξ, η 也是相互共轭的。根据(18.12)就能知道,如果 (x, y) 为实数,那么 (X, Y) 也为实数。于是从(18.13)可

知用实变数变换就能得到标准方程

$$\Delta u = \phi(X, Y, u, \partial_X u, \partial_Y u). \quad (18.14)$$

注意 1 如 a, b, c 不是 (x, y) 的解析正则函数, 那么上面的方法将不适用。但是在这种情形中是否仍存在着实变数的变换, 使得方程能化成 (18.14) 标准型的形状呢? 这是一个难问题。(参见 Courant-Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik II 中关于 Beltrami 方程一节。)

3. 抛物型 $ac - b^2 = 0$ 的情形。

(18.5) 具有实的二重根 $\lambda = \lambda_1(x, y)$, 故

$$Q(\varphi, \varphi) = a(\varphi_x - \lambda_1 \varphi_y)^2.$$

现在令 $\xi = \xi(x, y)$ 为满足方程

$$\xi_x - \lambda_1(x, y)\xi_y = 0 \quad (18.15)$$

并且 $\xi_y \neq 0$ 的函数, 则

$$A = Q(\xi, \xi) = 0. \quad (18.16)$$

又因 $b = -a\lambda_1, c = a\lambda_1^2$, 所以有

$$\begin{aligned} B = Q(\xi, \eta) &= (a\xi_x + b\xi_y)\eta_x + (b\xi_x + c\xi_y)\eta_y \\ &= a(\xi_x - \lambda_1\xi_y)\eta_x - a\lambda_1(\xi_x - \lambda_1\xi_y)\eta_y, \end{aligned}$$

因而根据 (18.15), 对任意的 $\eta(x, y)$, 必然有

$$B = 0. \quad (18.17)$$

现在选取 η , 使得 $\eta_x - \lambda_1\eta_y \neq 0$, 那么就有

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = -\xi_y(\eta_x - \lambda_1\eta_y) \neq 0,$$

$$C = Q(\eta, \eta) = a(\eta_x - \lambda_1\eta_y)^2 \neq 0,$$

于是可以代替 (x, y) 而取 (ξ, η) 为独立变数, 从而由 (18.2) 就得到了标准方程

$$\partial_{\eta\eta}^2 u = g_1(\xi, \eta, u, \partial_\xi u, \partial_\eta u). \quad (18.18)$$

注意 2. 在双曲型及抛物型的情形中, 如果假定 a, b, c 是 (x, y) 的二次连续可微的函数, 那么 λ_1, λ_2 也二次连续可微, 从而知道 ξ, η 也二次连续可微。一般地说, ξ, η 与 a, b, c 具有同次数的可微性。

注意 3 根据 § 3 中所说的特征条件, 如果 $\varphi(x, y) = c$ 所决定的曲线是方程的特征线, 那么对

$$\varphi(x, y) = c, \quad \text{必有 } Q(\varphi, \varphi) = 0.$$

因此由方程 (18.7) 的解 $\xi(x, y)$ 及 $\eta(x, y)$ 所表示的两族曲线

$$\xi(x, y) = c, \quad \eta(x, y) = c' \quad (c, c' \text{ 任意常数})$$

都是 § 3 意义下的特征曲线。双曲型方程具有两族实特征线。椭圆型方程不存在实特征线, 抛物型方程则仅存在一族实特征曲线。并且标准型 (18.10) 的两族特征线是 $\xi = c, \eta = c'$, 而 (18.18) 的特征线族仅为 $\eta = c$ 。

§ 19 标准双曲型偏微分方程

1. 首先考虑一下最简单的方程

$$\partial_{xy}^2 u = 0. \quad (19.1)$$

容易给出它的通解

$$u = \varphi(x) + \psi(y), \quad (19.2)$$

$\varphi(x), \psi(y)$ 是任意函数。由 (19.2) 立刻就有

$$p = u_x = \varphi'(x), \quad q = u_y = \psi'(y). \quad (19.3)$$

现在我们要利用 Cauchy 条件来决定任意函数 φ, ψ 。设 C 是一条曲线, 它没有与 x 轴或 y 轴平行的切线。设在

$$\left. \begin{aligned} C: (x, y) &= \{X, Y\}(s), \\ u &= U(s) \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

(s 是曲线的参数), 并且还给出了关于导函数 p, q 的条件

$$\alpha(s)p + \beta(s)q = \gamma(s), \quad (19.5)$$

这里

$$\begin{vmatrix} X'(s) & Y'(s) \\ \alpha(s) & \beta(s) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (19.6)$$

那么利用 C 的成带条件

$$X'(s)p + Y'(s)q = U'(s) \quad (19.7)$$

及 (19.5), 就能得到 $p = \varphi'(X), q = \psi'(Y)$ [由于 (19.3) 及

(19.6)]. 另外, 因为有 $\{X', Y'\}(s) \neq (0, 0)$, 所以 $\varphi(x), \psi(y)$ 除了积分常数之外可完全决定, 而积分常数则由条件(19.4)决定。

注意1 如果 $\{X, Y, U\}(s)$ 是 $p+1$ 次连续可微, 而 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 是 p 次连续可微 ($p \geq 0$), 那么, $\varphi(x), \psi(y)$ 就 $p+1$ 次连续可微。

2. 下面考虑一下较为一般的方程

$$\partial_{xy}^2 u = f(x, y). \quad (19.8)$$

设 $u = u_1(x, y)$ 为方程 (19.8) 的一个特解, $\varphi(x), \psi(y)$ 是任意函数, 那么容易给出 (19.8) 的通解为

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + u_1(x, y). \quad (19.9)$$

这时, 为了求满足 Cauchy 条件 (19.4) 和 (19.5) 的解, 只要先求出在 C 上满足 $(u, p, q) = (0, 0, 0)$ 的 (19.8) 的解 $u = u_1(x, y)$, 然后再求出满足条件 (19.4) 与 (19.5) 的 φ 与 ψ 即可。

现在用单值连续可微的函数 $g(x)$ 把曲线 C 的方程写成

$$C: y = g(x), \text{ 并且 } g'(x) \neq 0. \quad (19.10)$$

再用通过 C 外一点 (x^0, y^0) 的两条直线 $x = x^0, y = y^0$, 作成一個由直线与 C 所包围的区域, 并记作 $D(x^0, y^0)$ (图 19.1) ①。考虑积分

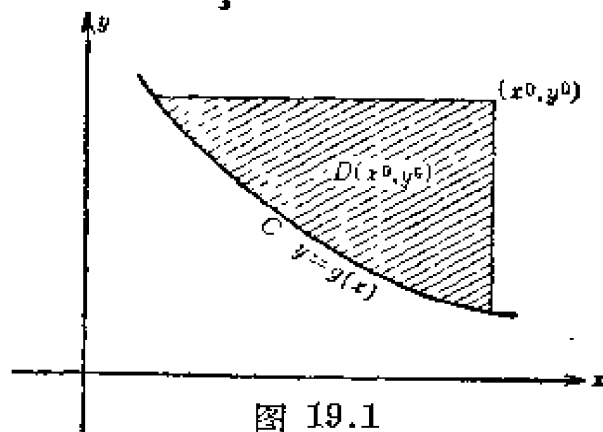


图 19.1

$$u_1(x, y) = \iint_{D(x, y)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (19.11) \text{ ①}$$

把它写成累次积分后, 有

① 原书图 19.1 中, 区域 $D(x^0, y^0)$ 误为 $D(x_0, y_0)$; 在 (19.11) 中, 积分域 $D(x, y)$ 误为 $D(x^0, y^0)$. ——校者注

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y) &= \int_{g^{-1}(y)}^x \left\{ \int_{g(\xi)}^y f(\xi, \eta) d\eta \right\} d\xi \\
 &= \int_{g(x)}^y \left\{ \int_{g^{-1}(\eta)}^x f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta, \quad (19.12)
 \end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}
 \partial_x u_1 &= \int_{g(x)}^y f(x, \eta) d\eta, \quad \partial_y u_1 = \int_{g^{-1}(y)}^x f(\xi, y) d\xi, \\
 \partial_{xy}^2 u_1 &= f(x, y). \quad (19.13)
 \end{aligned}$$

因此在 C 上, 即当 $y = g(x)$ 时, 有

$$(u_1, \partial_x u_1, \partial_y u_1) = (0, 0, 0). \quad (19.14)$$

这样就解决了(19.8)的 Cauchy 问题。

习题 1 设过 (x^0, y^0) 的特征线 $x = x^0, y = y^0$ 与曲线 C 的交点分别为 P, Q . 试证, (19.8) 的解 $u(x, y)$ 在 $D(x^0, y^0)$ 内部点上的值由 (u, p, q) 在 C 的 PQ 弧上的值所完全决定。

3. 现在用逐次逼近法来求一般方程

$$\partial_{xy}^2 u = f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) \quad (19.15)$$

的 Cauchy 问题的解。首先决定在 C 上满足初始条件(19.4)和(19.5)的 $\varphi(x)$ 与 $\psi(y)$. 并且为了方便, 对任一已给的函数 $u = u(x, y)$, 引入写法

$$f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = f[u](x, y). \quad (19.16)$$

现在设 $u_0(x, y)$ 是适当的函数 (譬如 $u_0 = \varphi(x) + \psi(y)$), 那么象下面这样可顺次决定 $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots$, 即当 $u_{n-1}(x, y)$ 已知时, 规定 $u_n(x, y)$ 为方程

$$\partial_{xy}^2 u = f[u_{n-1}](x, y)$$

满足原来的初始条件的解, 就是说

$$u_n(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{D(x, y)} f[u_{n-1}](\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (19.17)$$

这样地决定了函数序列 $u_n(x, y)$ 后, 能够证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n(x, y)$

一致收敛于问题的解。

証 設 $f(x, y, u, p, q)$ 满足下列的 Lipschitz 条件:

$$\begin{aligned} |f(x, y, \dot{u}, \dot{p}, \dot{q}) - f(x, y, u, p, q)| \\ \leq L(|\dot{u} - u| + |\dot{p} - p| + |\dot{q} - q|), \end{aligned} \quad (19.18)$$

(假设 f_u, f_p, f_q 为 (x, y, u, p, q) 的連續函数即可。) 此外为了方便起见, 引入写法

$$\begin{aligned} |u(x, y)| + |\partial_x u(x, y)| + |\partial_y u(x, y)| \\ = (|1| + |\partial_x| + |\partial_y|)[u](x, y), \end{aligned}$$

并令

$$\begin{aligned} \|u\|_K = \max_{(x, y) \in D_0} \{ (|1| + |\partial_x| + |\partial_y|)[u](x, y) \\ \cdot \exp(-K|x - g^{-1}(y)| - K|y - g(x)|) \} \end{aligned} \quad (19.19)$$

(K 是以后决定的正数), 則 $\|u\|_K \geq 0$, 并且一般成立不等式:

$$\begin{aligned} (|1| + |\partial_x| + |\partial_y|)[u](x, y) \\ \leq \|u\|_K \exp(K|x - g^{-1}(y)| + K|y - g(x)|). \end{aligned} \quad (19.20)$$

另外, 为了简单起见, 仅考虑 $g(x)$ 单调减少而点 (x, y) 位于 C 的右上侧的情形。至于其他位置的情形, 自然可把 x 或 y 或两者的符号变过即可。于是由 (19.17) 与 (19.18) 有

$$\begin{aligned} |(u_{n+1} - u_n)|(x, y) &\leq \iint_{D(x, y)} |f[u_n] - f[u_{n-1}]|(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\leq \iint_{D(x, y)} L \cdot (|1| + |\partial_x| + |\partial_y|)[u_n - u_{n-1}](\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

而由 (19.20) (利用 $g(x)$ 的单调性) 有

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n|(x, y) \\ \leq L \|u_n - u_{n-1}\|_K \cdot \iint_{D(x, y)} \exp(K|\xi - g^{-1}(\eta)| + K|\eta - g(\xi)|) d\xi d\eta \\ \leq LK^{-2} \|u_n - u_{n-1}\|_K \exp(K|x - g^{-1}(y)| + K|y - g(x)|), \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}
|\partial_x(u_{n+1}-u_n)|_{(x,y)} &\leq \int_{g(x)}^y f[u_n] - f[u_{n-1}](x,\eta) d\eta \\
&\leq \int_{g(x)}^y L \|u_n - u_{n-1}\|_K \exp(K|x - g^{-1}(y)| + K|\eta - g(x)|) d\eta \\
&\leq LK^{-1} \|u_n - u_{n-1}\|_K \exp(K|x - g^{-1}(y)| + K|y - g(x)|),
\end{aligned}$$

同样地有

$$\begin{aligned}
|\partial_y(u_{n+1}-u_n)| &\leq LK^{-1} \|u_n - u_{n-1}\|_K \exp(K|x - g^{-1}(y)| \\
&\quad + K|y - g(x)|).
\end{aligned}$$

把这些不等式相加起来,并根据(19.19)就有

$$\|u_{n+1} - u_n\|_K \leq L(K^{-2} + 2K^{-1}) \|u_n - u_{n-1}\|_K. \quad (19.21)$$

现在这样地决定 K , 使得 $L(K^{-2} + 2K^{-1}) \leq 1/2$, 那么对于一切满足 $n' > n$ 的自然数对 n', n , 由(19.21)能够得到

$$\begin{aligned}
\|u_{n'} - u_n\|_K &\leq \sum_{r=n}^{n'-1} \|u_{r+1} - u_r\|_K \leq \sum_{r=n}^{n'-1} 2^{-r} \|u_1 - u_0\|_K \\
&\leq 2^{1-n} \|u_1 - u_0\|_K.
\end{aligned} \quad (19.22)$$

由(19.20)与(19.22)就能知道,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n(x, y)$, $\partial_x u_n(x, y)$, $\partial_y u_n(x, y)$ 都一致收敛。如果令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y) = u(x, y),$$

那么当 $n \rightarrow \infty$ 时,根据方程(19.17)的极限情形,应当有

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{D(x,y)} f[u](\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (19.23)$$

証毕

此外,还可以証明满足已知初始条件的解的唯一性。設 $u(x, y)$ 与 $u'(x, y)$ 为两个满足相同初始条件的解,由于两者都应该满足(19.23),所以它們的差满足

$$u'(x, y) - u(x, y) = \iint_{D(x,y)} (f[u'] - f[u])(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (19.24)$$

用与上面同样的証明方法,能得

$$\|u' - u\|_K \leq L(K^{-2} + 2K^{-1}) \|u' - u\|_K.$$

因为 $L(K^{-2} + 2K^{-1}) \leq 1/2$, 所以必然有

$$\|u' - u\|_K = 0,$$

即

$$u'(x, y) = u(x, y).$$

注意2 上面所說的种种事实, 只要假设 $\varphi(x), \psi(y)$ 連續可微, $f(x, y, u, p, q)$ 連續并且滿足条件 (19.18) 就能成立[适当地限制 (x, y) 的变域]。于是对于解 u 來說, $\partial_x u, \partial_y u, \partial_{xy}^2 u$ 都是連續的。但是仅凭这些假设不能証明 $\partial_{xx}^2 u, \partial_{yy}^2 u$ 的存在性, 这样将对独立变数的变换非常不利。为此我們需要假设 $f(x, y, u, p, q)$ 一次連續可微, $\varphi(x), \psi(y)$ 二次連續可微。事实上, 令

$$p = \partial_x u, \quad q = \partial_y u$$

后, 显然 $\partial_y u, \partial_y p (= \partial_{xy}^2 u)$ 对于 (x, y) 是連續的, 至于 q , 如以 x 为独立变数, 它本身为未知函数, y 为参数, 則將滿足常微分方程

$$\frac{d}{dx} q = F(x, q, y), \quad (19.25)$$

这里

$$F(x, q, y) = f(x, y, u(x, y), p(x, y), q),$$

并且以 “ $x = g^{-1}(y)$ 时, $q = \psi'(y)$ ” 为初始条件。由于 $F(x, q, y), F_q(x, q, y), F_y(x, q, y)$ 連續, 所以 $\partial_y q(x, y)$ 連續, 即 $\partial_{yy}^2 u$ 連續。同样地能够証明 $\partial_{xx}^2 u$ 的連續性。

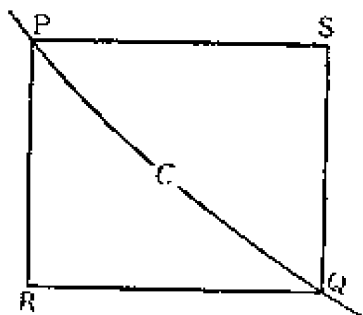


图 19.2

注意3 把本节中所講的方法与习题1联合起来考虑, 能得到下面的結果: 設在曲綫 C 上任取 P, Q 两点, 过这两点分別作特征綫(与 x 軸及与 y 軸平行的直綫), 則特征綫圍成矩形 $PRQS$ (图 19.2)。 u 在矩形內任一点处的值, 能被 (u, p, q) 在 C 的 \widehat{PQ} 弧上的值所唯一决定。在这种意义下, 我們叫矩形为弧 \widehat{PQ} 的决定区域。

其次, 在本节中所获得的一切結果, 几乎全部能推广到主部相等的联立方程組

$$\begin{aligned} \partial_{x_i y_i}^2 u_i &= f_i(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) \quad (i=1, \dots, m), \\ u &= (u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

的情形。

习题 2 对方程

$$\partial_{xx}^2 u - \partial_{yy}^2 u = f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)$$

証明下面的事实：如果 $f(x, y, u, p, q)$ 一次連續可微，而 $\alpha(y)$ 二次、 $\beta(y)$ 一次連續可微，則初始条件“ $x=a$ 时， $u=\alpha(y)$ ， $u_x=\beta(y)$ ”决定方程的解。此外，对直綫 $x=a$ 上的区間 $b < y < c$ ，找出解的决定区域。

习题 3 試証，代替 Cauchy 条件 (19.4), (19.5)，如果取条件为： $x=a$ 时， $u=\psi(y)$ ； $y=b$ 时， $u=\varphi(x)$ ，則这样也能决定方程 (19.8) 的解。这里假設 φ, ψ 連續可微， $\psi(b)=\varphi(a)$ ， $f(x, y, u, p, q)$ 連續并滿足条件 (19.18)。

§ 20 調和函数

現在考虑橢圓型方程最简单的情形，就是 Laplace 方程

$$\Delta u = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = 0. \quad (20.1)$$

这个方程的解叫調和函数。形式的来計算，可用

$$x+iy=\xi, \quad x-iy=\eta \quad (i^2=-1)$$

作变数变换，从而把 (20.1) 变成

$$\partial_{\xi\eta}^2 u = 0,$$

于是就得到 (20.1) 的通解，即

$$u = \varphi(x+iy) + \psi(x-iy). \quad (20.2)$$

当把函数考虑为复独立变数的可微函数时，这种計算方法完全有效。为了使得对应于实的 x, y ，函数 u 恒具有实数值，我們可在 (20.2) 中令 $\psi(x-iy) = \overline{\varphi}(x+iy)$ ($\overline{\varphi}$ 为 φ 的共轭数)，这样就有 $u = \Re\{2\varphi(x+iy)\}$ ，即調和函数是复变数 $x+iy$ 的正則函数的实部。

上面的推导并不太严密。正确的說法如下：存在着以 $u(x, y)$ 为实部的 $x+iy$ 的正則函数 $u+iv$ (任意次可微) 这个事实，等价于存在着滿足 Cauchy-Riemann 方程

$$v_y = u_x, \quad v_x = -u_y \quad (20.3)$$

的函数 v 这个事实。因此对 $u(x, y)$ 必有条件

$$\partial_x(u_x) = \partial_y(-u_y),$$

这样可以看出, u 为方程(20.1)的解这个事实, 与存在着以 u 为实部的 $x+iy$ 的正则函数这个事实是等价的。

由于这个结果, 我们能够导出调和函数的下列性质:

(i) 在定义域内部任作一圆, 则函数在圆心处的值等于它在圆周上的值的均值。

(ii) 除了函数恒等于常数的情形以外, 它不能在定义域的内点上取极大或极小值。

(iii) 在定义域任意一内点 (x^0, y^0) 的近傍, 它可以展开成为 $x-x^0, y-y^0$ 的广义绝对一致收敛的二重幂级数(解析正则性)。

(iv) 如两个调和函数在定义域的一部分上相等, 那么无论这部分多小, 只要含有内点, 则两函数在所有包含这部分的连通区域上是一致的。

(v) 如果对独立变数施以保角变换, 则调和函数仍然变成调和函数。

对于双曲型方程

$$\partial_{xx}^2 u - \partial_{yy}^2 u = 0$$

的解, 代替(i)而有下面的特殊性质:

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) = u(x, y+h) + u(x, y-h),$$

这里的 h 是充分小的数。但是这种解不具有象 (iii), (iv) 那种有关正则性的性质。

此外, 在考虑 Laplace 方程(20.1)的始值问题:

$$x=0 \text{ 时, } u=\varphi(y), \quad u_x=\psi(y)$$

的时候, 如果假设 $\psi(y) \equiv 0$, 而 $\varphi(y)$ 不是解析正则函数, 则解将不存在。什么道理呢? 譬如对 $x \geq 0$ 所定的 $u(x, y)$, 我们规定当

$x < 0$ 时,

$$u(-x, y) = u(x, y),$$

由于 u 在离 $x=0$ 相当远的两侧处都是調和函数, 所以 $u(0, y) = \varphi(y)$ 非是 y 的解析正則函数不可。(这里假定了 u 当 $x \geq 0$ 时二次連續可微, 事实上只要假設 u 一次連續可微就够了。)

考虑下面关于方程 (20.1) 的边值問題: 在单位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上給定任意的連續函数, 求在圓上取这个值而在圓內 $x^2 + y^2 < 1$ 是調和的函数(在閉圓 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上它是連續的)。这样的函数恒是存在的。我們利用极坐标

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

并設圓周上已給的連續函数为 $g(\theta)$ (但 $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$), 那么解可表为 **Poisson 积分**

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)g(\varphi)}{1-2r \cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi. \quad (20.4)$$

公式 (20.4) 可以根据調和函数的性質 (i) 及 (v) 导出。設 $z = x + iy$ 是 $|z| < 1$ 中固定一点, 考虑把 ζ 变到 ζ' 的变换

$$\zeta' = \frac{\zeta - z}{z\bar{\zeta} - 1}, \quad (20.5)$$

这个变换作成了单位圓 $|\zeta| \leq 1$ 与单位圓 $|\zeta'| \leq 1$ 之間一一对应的保角映象, 并把 $\zeta = z$ 变成 $\zeta' = 0$ 。假設圓周上的对应关系是

$$\zeta = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \zeta' = e^{i\sigma}, \quad (20.6)$$

令 $g(\varphi) = \tilde{g}(\sigma)$, 則由 (i) 有

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\sigma) d\sigma. \quad (20.7)$$

由 (20.5) 与 (20.6) 有

$$e^{i\sigma} = \frac{e^{i\varphi} - z}{z e^{i\varphi} - 1}, \quad (20.8)$$

两边微分后, 有

$$ie^{i\sigma}d\sigma = \left\{ \frac{ie^{i\varphi}}{ze^{i\varphi}-1} - \frac{(e^{i\varphi}-z)\bar{z}ie^{i\varphi}}{(\bar{z}e^{i\varphi}-1)^2} \right\} d\varphi.$$

于是由(20.8), 取 $z=re^{i\theta}$ 后, 则有

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z} - \frac{\bar{z}e^{i\varphi}}{\bar{z}e^{i\varphi}-1} \right) d\varphi \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (20.9)$$

由(20.7), (20.9)以及 $\tilde{g}(\sigma)=g(\varphi)$, 就得到了(20.4)。

反过来, 设 $g(\theta)$ 是任意一个以 2π 为周期的连续函数, 由于

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z} - \frac{ze^{-i\varphi}}{ze^{-i\varphi}-1} \right) g(\varphi) d\varphi$$

是在 $|z|<1$ 内关于 z 的正则函数, 所以它的实部

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z} - \frac{\bar{z}e^{i\varphi}}{\bar{z}e^{i\varphi}-1} \right) g(\varphi) d\varphi,$$

即(20.4) (见(20.9))是在 $|z|<1$ 内关于 (x, y) 的调和函数。余下只要证明当 $r \rightarrow 1$ ($r < 1$) 时, $u \rightarrow g(\theta)$ 即可。为了方便起见, 令

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = K(r, \theta) \quad (0 \leq r < 1),$$

则(20.4)可以写成

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi-\theta) g(\varphi) d\varphi. \quad (20.10)$$

由于当 $u \equiv 1$ 时, (20.4)应该成立, 所以有

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi-\theta) d\varphi = 1, \quad (20.11)$$

从而由(20.10)可以得到

$$u - g(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi-\theta) \{g(\varphi) - g(\theta)\} d\varphi. \quad (20.12)$$

因此, 现在只需证明当 $r \rightarrow 1$ 时, 上式的右边收敛于0即可。因为 $g(\varphi)$ 是连续的, 所以对已知的任意小的正数 ε , 可选择相当小

的 $\delta > 0$, 使得

$$|\varphi - \theta| < \delta \text{ 时, } |g(\varphi) - g(\theta)| < \varepsilon. \quad (20.13)$$

于是由 $K(r, \varphi - \theta) > 0$ 及 (20.12) 有

$$|u - g(\theta)| \leq \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{-\delta} \right\} K(r, \varphi - \theta) |g(\varphi) - g(\theta)| d\varphi, \quad (20.14)$$

再由 (20.11) 与 (20.13) 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta}^{\delta} K(r, \varphi - \theta) |g(\varphi) - g(\theta)| d\varphi \\ & \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi - \theta) d\varphi = \varepsilon. \end{aligned} \quad (20.15)$$

又当 $\delta \leq |\varphi - \theta| \leq \pi$ 时, 有

$$K(r, \varphi - \theta) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos \delta)}. \quad (20.16)$$

另外还存在着 M , 使得 $|g(\varphi) - g(\theta)| \leq M$, 所以由 (20.16) 有

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\delta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{-\delta} \right\} K(r, \varphi - \theta) |g(\varphi) - g(\theta)| d\varphi \\ & \leq \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos \delta)} M. \end{aligned} \quad (20.17)$$

这样由 (20.14), (20.15), (20.17) 就有

$$|u - g(\theta)| \leq \varepsilon + \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos \delta)} M.$$

当 r 相当地接近 1 时, $M(1 - r^2) / 2r(1 - \cos \delta) < \varepsilon$, 所以

$$|u - g(\theta)| < 2\varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ 任意小}).$$

于是证明了当 $r \rightarrow 1$ 时, $u \rightarrow g(\theta)$.

§ 21 一阶半线性偏微分方程组

1. 变到标准型的变换 设 x, y 是独立变数, u_1, \dots, u_m 是 (x, y) 的未知函数, 我们考虑联立方程组

$$\partial_x u_i = \sum_{j=1}^m A_{ij}(x, y) \partial_y u_j + f_i(x, y, u), \quad (21.1)$$

$$u = (u_1, \dots, u_m) \quad (i=1, \dots, m).$$

从形式上来说,即使对于更一般的联立方程组

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \partial_x u_j + \sum_{j=1}^m b_{ij}(x, y) \partial_y u_j = c_i(x, y, u), \quad (21.2)$$

如果对 $\partial_x u$ 的系数,成立着条件

$$\left| a_{ij}(x, y) \quad i=1, \dots, m \atop j=1, \dots, m \right| \neq 0,$$

那么由(21.2)解出 $\partial_x u_i$ 后,就化成了(21.1)的形状。为了使方程组(21.1)的主部更进一步的简化,可适当选择函数 $\alpha_{ij}(x, y)$, 并令

$$u_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(x, y) v_j, \quad (21.3)$$

这里还假设

$$\left| \alpha_{ij} \quad i=1, \dots, m \atop j=1, \dots, m \right| \neq 0, \quad (21.4)$$

于是有

$$\partial_x u_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \partial_x v_j + \sum_{j=1}^m \partial_x \alpha_{ij} v_j,$$

$$\partial_y u_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \partial_y v_j + \sum_{j=1}^m \partial_y \alpha_{ij} v_j,$$

从而由(21.1)就得到

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \partial_x v_j = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m A_{ij} \alpha_{jk} \right) \partial_y v_k + \phi_i(x, y, v), \quad (21.5)$$

这里

$$\phi_i = f_i + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m A_{ij} \partial_y \alpha_{jk} - \partial_x \alpha_{ik} \right) v_k.$$

在(21.5)中解出 $\partial_x v_j$ 后,能得到具有下面形状的文件组

$$\partial_x v_j = \sum_{k=1}^m B_{jk}(x, y) \partial_y v_k + g_j(x, y, v). \quad (21.6)$$

比較 (21.5) 与 (21.6), 就有

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} B_{jk} = \sum_{j=1}^m A_{ij} \alpha_{jk}. \quad (21.7)$$

适当地选择 α_{ij} , 就可以认为 (B_{jk}) 是仅具主对角线部分的矩阵, 即

$$B_{kk} = \lambda_k, \text{ 当 } j \neq k \text{ 时, } B_{jk} = 0.$$

这样, (21.7) 就成为

$$\sum_{j=1}^m (A_{ij} - \lambda_k) \alpha_{jk} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, m \end{array} \right). \quad (21.8)$$

方程组 (21.8) 存在着满足条件

$$(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}) \neq (0, \dots, 0) \quad (21.9)$$

的解的充要条件为, $\lambda = \lambda_k$ 是下列关于 λ 的 m 次方程

$$\left| A_{ij}(x, y) - \lambda \delta_{ij} \right|_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}} = 0 \quad (21.10)$$

的根。就是说, 它是矩阵 (A_{ij}) 的本征值。此外, 设 (21.10) 的根都是相异的 (不限定是实的), 令其为

$$\lambda_1(x, y), \dots, \lambda_m(x, y),$$

这时, 对于满足 (21.8), (21.9) 的 α_{jk} , (21.4) 必然成立。所以利用变换 (21.3), 就可以把 (21.1) 变成为标准型方程

$$\partial_x v_i = \lambda_i(x, y) \partial_y v_i + g_i(x, y, v) \quad (i=1, \dots, m). \quad (21.11)$$

用实数值的变换能够变成标准型方程的方程组 (21.1) 叫做双曲型方程。如果 (21.10) 的 m 个根是相异的实数, 那么 (21.1) 显然属于双曲型。这时, 把这种方程组特别叫做狭义双曲型的。当 (21.10) 不含有实根时, 就叫方程组 (21.1) 为椭圆型的。

注意 当 (A_{ij}) 具有相异的本征值时, $\lambda_i(x, y)$ 与 $A_{ij}(x, y)$ 将有同程度的正则性 (p 次连续可微, 或解析正则)。这时可取 α_{jk} 为行列式 $|A_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}|$ 对应于元素 $A_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}$ 的余因子 (适当选择 i)。这就说明了 $\alpha_{jk}(x, y)$ 与 $A_{ij}(x, y)$ 也具有同程度的正则性。特别如 $A_{ij}(x, y)$ 二次连续可微, $f_i(x, y, u)$

一次連續可微,那么 $\lambda_i(x, y)$ 也就二次連續可微, $g_i(x, y, r)$ 一次連續可微。但是,如果 f_i 二次連續可微时, g_i 却不一定二次連續可微。

上面仅討論了(21.10)不具有等根的情形。对等根的情形,請參看 Petrovski: Lectures on partial differential equations, p. 53.

2. 关于橢圓型的情形 如果(21.10)有一个不是实的根,那么它就有一对共轭复根。与复根对应的 α_{jk} 也成为共轭复数。这就是說,如以 λ_k 及 $\bar{\lambda}_k$ 表示(20.10)的一对共轭根,那么就存在着-对完全成共轭的标准方程,即

$$\partial_x w_k = \lambda_k \partial_y w_k + f_k, \quad \partial_x \bar{w}_k = \bar{\lambda}_k \partial_y \bar{w}_k + \bar{f}_k. \quad (21.12)$$

如方程(21.10)无重根,那么橢圓型方程組就能变成 l 对 ($m=2l$) 形状如(21.12)的方程。

特別对 $m=2$ 的情形,如果 $A_{ij}(x, y)$ 是实变数 (x, y) 的解析正則函数,由于这时它的本征值 $\lambda(x, y)$ 也是解析正則的,所以可令

$$\lambda(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) \quad (i^2 = -1). \quad (21.13)$$

(有时还能把 α, β 拓广为复变数 (x, y) 的正則函数来考虑。)这样,滿足一阶綫性偏微分方程

$$\zeta_x - \lambda(x, y)\zeta_y = 0, \quad (21.14)$$

而且 $\zeta_y \neq 0$ 的解就可写成

$$\zeta = \xi(x, y) + i\eta(x, y) \quad (i^2 = -1).$$

(当 x, y 是实数时,則 ξ, η 也是实的。)依照(21.13)把(21.14)分为实部与虚部后,就得到

$$\left. \begin{aligned} \xi_x - \alpha\xi_y &= -\beta\eta_y, \\ \eta_x - \alpha\eta_y &= \beta\xi_y. \end{aligned} \right\} \quad (21.15)$$

从这里就知道,当 $\beta \neq 0$ 时,

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = -\beta(\xi_y^2 + \eta_y^2) = -\beta|\zeta_y|^2 \neq 0.$$

因此可以用 (ξ, η) 代替 (x, y) 作为独立变数(实变换),再設

$$w = u + iv, f = g + ih \quad (i^2 = -1). \quad (21.16)$$

因为

$$\partial_x w = (\xi_x \partial_\xi + \eta_x \partial_\eta)(u + iv),$$

$$\partial_y w = (\xi_y \partial_\xi + \eta_y \partial_\eta)(u + iv),$$

所以把(21.12)分为实部与虚部后,就有

$$-\eta_y(\partial_\xi u - \partial_\eta v) + \xi_y(\partial_\xi v + \partial_\eta u) = g/\beta,$$

$$-\xi_y(\partial_\xi u - \partial_\eta v) - \eta_y(\partial_\xi v + \partial_\eta u) = h/\beta.$$

最后就得到了主部与 Cauchy-Riemann 方程一样的方程组

$$\left. \begin{aligned} \partial_\xi u - \partial_\eta v &= -(\eta_y g + \xi_y h) / \beta (\xi_y^2 + \eta_y^2), \\ \partial_\xi v + \partial_\eta u &= (\xi_y g + \eta_y h) / \beta (\xi_y^2 + \eta_y^2). \end{aligned} \right\} \quad (21.17)$$

3. 特征曲线 设 $\varphi(x, y) = 0$ 是在 § 3 意义下的方程 (21.1) 的特征曲线(一维的特征面)。如果再设 $\varphi_y \neq 0$, 则曲线方程也可以写成 $y = y(x)$ 。现在由 $\varphi(x, y(x)) = 0$, 有 $(\varphi_x + \varphi_y y')_{y=y(x)} = 0$, 所以有

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \delta_{ij} \varphi_x + A_{ij} \varphi_y & i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m \end{array} \right| &= \left| -(\delta_{ij} y' + A_{ij}) \varphi_y \right. \\ &\quad \left. i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m \right| \\ &= (-\varphi_y)^m \left| \delta_{ij} y' + A_{ij} \right. \\ &\quad \left. i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m \right|. \end{aligned}$$

因为 $y = y(x)$ 是 (21.1) 的特征曲线, 所以必定有

$$\left| \delta_{ij} y' + A_{ij} \right. \left. i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m \right| = 0. \quad (21.18)$$

设 (A_{ij}) 的本征值是 $\lambda_1(x, y), \dots, \lambda_m(x, y)$, 这样, $y = y(x)$ 为特征曲线的事实, 就等价于 $y = y(x)$ 满足下列方程

$$(y' + \lambda_1(x, y)) \cdots (y' + \lambda_m(x, y)) = 0.$$

因此 (21.1) 特征曲线的全体, 就是 m 个方程的方程组

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda_i(x, y) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (21.19)$$

的解的曲线族(对每个 i 可分别加以考虑)的全体。

此外,对于二阶半綫性方程

$$\begin{aligned} a(x, y) \partial_{xx}^2 u + 2b(x, y) \partial_{xy}^2 u + c(x, y) \partial_{yy}^2 u \\ = f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u), \end{aligned} \quad (21.20)$$

如令

$$\partial_x u = p, \quad \partial_y u = q,$$

則

$$\partial_x q = \partial_{xy}^2 u = \partial_y p, \quad \partial_{yy}^2 u = \partial_y q,$$

因而就能把它变成关于 (u, p, q) 的联立一阶半綫性方程组

$$\begin{cases} \partial_x u = p, \\ \partial_x p = -2\frac{b}{a} \partial_y p - \frac{c}{a} \partial_y q + \frac{1}{a} f(x, y, u, p, q), \\ \partial_x q = \partial_y p. \end{cases} \quad (21.21)$$

設 $(u, p, q) = (u_1, u_2, u_3)$, 并取

$$A_{1j} = A_{i1} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad A_{33} = 0,$$

$$A_{22} = -2b/a, \quad A_{23} = -c/a, \quad A_{32} = 1,$$

显然(21.21)属于(21.1)的形状,它的特征方程是

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2b/a & -c/a \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{a} \lambda (a^2 \lambda^2 + 2b\lambda + c) = 0. \quad (21.22)$$

如果 $ac - b^2 < 0$, 那么方程(21.22)的根是 $\lambda = 0$ 以及两个相异的实根 λ_1 与 λ_2 . 因为(21.21)中的第一式的主部与第二, 第三两式的主部无关, 所以可对第二, 第三两式施以实变换使之化成标准型方程。这时我們說(21.20)是双曲型的。这个定义与 § 18 中的定义完全一致。此外关于特征綫, 則除了对应于 $\lambda = 0$ (即 $y = \text{常数}$) 的那一组以外, 也与 § 18 中所給的一致。

如果 $ac - b^2 > 0$, 那么除去 $y = \text{常数}$ 的一组以外, 沒有实的特征綫了。这时把(21.21)中的第一式除外, 方程组其余的部分相

当于 § 18 中所定义的橢圓型。

下面我們驗證一下特征条件对于方程变换的不变性。設下面是关于 m 个独立变数 $x = (x_1, \dots, x_m)$ 及 l 个未知函数 $u = (u_1, \dots, u_l)$ 的半綫性方程組

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu}(x) \partial_{\mu} u_j = b_i(x, u) \quad (i=1, \dots, l). \quad (21.23)$$

又 $\varphi(x) = 0$ 所代表的曲面滿足特征条件

$$\left| \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu} \partial_{\mu} \phi \quad \begin{matrix} i \downarrow 1, \dots, l \\ j \rightarrow 1, \dots, l \end{matrix} \right| = 0. \quad (21.24)$$

再設方程組的綫性組合的变换

$$\sum \gamma_{ki} a_{ij\mu} = a'_{kj\mu}, \quad \sum \gamma_{ki} b_i = b'_k,$$

把 (21.23) 变成

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^m a'_{kj\mu}(x) \partial_{\mu} u_j = b'_k(x, u) \quad (k=1, \dots, l),$$

則由于

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\mu=1}^m a'_{kj\mu} \partial_{\mu} \phi \quad \begin{matrix} k \downarrow 1, \dots, l \\ j \rightarrow 1, \dots, l \end{matrix} \right| \\ &= \left| \gamma_{ki} \quad \begin{matrix} k \downarrow 1, \dots, l \\ i \rightarrow 1, \dots, l \end{matrix} \right| \cdot \left| \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu} \partial_{\mu} \phi \quad \begin{matrix} i \downarrow 1, \dots, l \\ j \rightarrow 1, \dots, l \end{matrix} \right|, \end{aligned}$$

可見特征条件对变换显然是不变的。

其次, 設未知函数間的綫性組合的变换

$$u_i = \sum_{j=1}^l \alpha_{ij}(x) v_j,$$

把方程 (21.23) 变成了

$$\sum_{k=1}^l \sum_{\mu=1}^m \tilde{a}_{ik\mu}(x) \partial_{\mu} v_k = \tilde{b}_i(x, v) \quad (i=1, \dots, l),$$

則由于

$$\tilde{a}_{ik\mu} = \sum_{j=1}^l a_{ij\mu} \alpha_{jk},$$

所以

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\mu=1}^m \tilde{a}_{ijk\mu} \partial_{\mu} \phi \quad \begin{matrix} i \downarrow 1, \dots, l \\ k \rightarrow 1, \dots, l \end{matrix} \right| \\ &= \left| \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu} \partial_{\mu} \phi \quad \begin{matrix} i \downarrow 1, \dots, l \\ j \rightarrow 1, \dots, l \end{matrix} \right| \cdot \left| a_{jk} \quad \begin{matrix} j \downarrow 1, \dots, l \\ k \rightarrow 1, \dots, l \end{matrix} \right|, \end{aligned}$$

这样就证明了对未知函数间的变换, 特征条件也是不变的。

最后, 如果当独立变数由 (x) 变成 (x') 时, (21.23) 变成

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\nu=1}^m \bar{a}_{ij\nu}(x') \partial'_{\nu} u_j = \bar{b}_i(x', u) \quad (i=1, \dots, l),$$

则由于

$$\bar{a}_{ij\nu} = \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu} \partial_{\mu} x'_{\nu}, \quad \partial_{\mu} \phi = \sum_{\nu=1}^m \partial'_{\nu} \phi \partial_{\mu} x'_{\nu},$$

所以

$$\sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu} \partial_{\mu} \phi = \sum_{\nu=1}^m \bar{a}_{ij\nu} \partial'_{\nu} \phi.$$

这表示, 特征条件仍是不变的。

习题 1 把下列的联立方程

$$\begin{cases} \partial_x u = a(x, y) \partial_y v + g(x, y), \\ \partial_x v = a(x, y) \partial_y u + h(x, y) \end{cases}$$

变成标准型。特别是当 $a(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, $\beta(y) = 0$ 时, 讨论上列方程组的解法。

习题 2 设 $ac - b^2 = -\mu^2 < 0$, 把 (20.21) 变成标准型。

§ 22 双曲型半线性一阶方程组

1. 逐次逼近法 根据前节的结果, 可以用实数值的变换把双曲型半线性联立一阶方程组化成下面的标准型

$$\begin{aligned} \partial_x u_i &= \lambda_i(x, y) \partial_y u_i + f_i(x, y, u), \\ u &= (u_1, \dots, u_m) \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned} \quad (22.1)$$

如果方程右边的 f_i 中不含 u , 那么 (22.1) 的每个方程对于 u_i 是独

立的一阶线性方程,从而可以用第2章中的方法求解。当 f_i 内含有 u 时,可用逐次逼近法求解。为了要得到当 $x=a$ 时, $u_i=p_i(y)$ 的解,可先适当的取 $u_i^{(n)}(x, y)$ (譬如可取 $u_i^{(0)}=p_i(y)$),并顺次地规定 $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(n)}$ 如下:即当 $u_i^{(n-1)}$ 已知时,令 $u_i^{(n)}$ 是微分方程

$$\partial_x u_i = \lambda_i(x, y) \partial_y u_i + f_i(x, y, u_i^{(n-1)}(x, y)) \quad (i=1, \dots, m) \quad (22.2)$$

满足始值条件“ $x=a$ 时, $u_i=p_i(y)$ ”的解。为了要证明当 $n \rightarrow \infty$ 时 $u_i^{(n)}$ 一致收敛于方程(22.1)的解,需要先证明下面的定理。

定理 22.1 (假设) 令 $a \leq x \leq a'$, $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ 所规定的 (x, y) 区域为 D 。这里 $\alpha(x), \beta(x)$ 是连续可微的函数,并且分别满足下列微分不等式

$$\alpha'(x) \leq -\lambda(x, \alpha(x)), \quad \beta'(x) \geq -\lambda(x, \beta(x)), \quad (22.3)$$

其中 $\lambda, \lambda_y, f, f_y$ 是在 D 中的 (x, y) 的连续函数。此外存在着常数 L , 及 x 的连续函数 $g(x), h(x)$, 使得

$$|\lambda_y(x, y)| \leq L, \quad (22.4)$$

$$|f(x, y)| \leq g(x), \quad |f_y(x, y)| \leq h(x). \quad (22.5)$$

(结论) 若 $\varphi(y)$ 为已知函数,它在 $\alpha(a) \leq y \leq \beta(a)$ 中连续可微,并且满足不等式

$$|\varphi(y)| \leq \varepsilon, \quad |\varphi'(y)| \leq \varepsilon', \quad (22.6)$$

则微分方程

$$\partial_x u = \lambda(x, y) \partial_y u + f(x, y) \quad (22.7)$$

具有满足初始条件 $x=a$ 时, $u=\varphi(y)$ 的解 $u=u(x, y)$ (在 D 中连续可微),它在 D 中还满足下列的不等式:

$$|u(x, y)| \leq \varepsilon + \int_a^x g(\xi) d\xi \quad (22.8)$$

及

$$|\partial_y u(x, y)| \leq \varepsilon' e^{L(x-a)} + \int_a^x e^{L(x-\xi)} h(\xi) d\xi. \quad (22.9)$$

这个定理的证明后面再讲, 现在先利用它来证明 $u_i^{(n)}$ 的一致收敛性。首先设有 m 个函数 $\lambda_i(x, y)$, 对于它们微分不等式 (22.3) 已成立。此外还存在着常数 $H > 0$, 使得

$$|\partial_y f_i| \leq H. \quad (22.10)$$

现在引入常数 $K > 0$ (它的大小将在后面决定), 并引入符号

$$\text{Max}_{(x, y) \in D} \left\{ \sum_{i=1}^m |u_i(x, y)| e^{-K(x-a)} \right\} = \|u\|_K, \quad (22.11)$$

则

$$\sum_{i=1}^m |u_i(x, y)| \leq \|u\|_K e^{K(x-a)}. \quad (22.12)$$

因为 $u_i = u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}$ 是微分方程

$$\partial_x u_i = \lambda_i(x, y) \partial_y u_i + \{f_i(x, y, u^{(n)}) - f_i(x, y, u^{(n-1)})\} \quad (22.13)$$

满足初始条件 “ $x=a$ 时, $u_i=0$ ” 的解, 所以由 (22.10), (22.13) 及 (22.12) 有

$$\begin{aligned} |f_i(x, y, u^{(n)}) - f_i(x, y, u^{(n-1)})| &\leq H \sum_{j=1}^m |u_j^{(n)} - u_j^{(n-1)}| \\ &\leq H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K e^{K(x-a)}. \end{aligned}$$

于是由定理 22.1 (设 $\varepsilon \neq 0$), 就有

$$\begin{aligned} |u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}| &\leq \int_a^x H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K e^{K(x-\xi)} d\xi \\ &< K^{-1} H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K e^{K(x-a)}. \end{aligned}$$

再由 (22.11) 有

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_K \leq m K^{-1} H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K. \quad (22.14)$$

令 $K = 2mH$, 根据 (22.14), 对于一切大于 n 的自然数 n' , 可以得到

$$\begin{aligned} \|u^{(n')} - u^{(n)}\|_K &\leq \sum_{\nu=n}^{n'-1} \|u^{(\nu+1)} - u^{(\nu)}\|_K \leq \sum_{\nu=1}^{n'-1} 2^{-\nu} \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_K \\ &\leq 2^{1-n} \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_K. \end{aligned}$$

由此式及 (22.12), 就知道当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_i^{(n)}(x, y)$ 在 D 中一致收敛。即存在着极限函数 $u_i(x, y)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_i^{(n)}(x, y) = u_i(x, y). \quad (22.15)$$

对于 u_i 明显地有 $u_i(a, y) = \varphi_i(y)$ 。但是要证明它是 (22.1) 的解, 还需要证明 $\partial_x u_i^{(n)}$ 及 $\partial_y u_i^{(n)}$ 都是一致收敛的。关于这一点, 我们在定理证明之后再来进行论证。

2. 定理 22.1 的证明 (22.7) 的特征曲线是方程

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda(x, y) \quad (22.16)$$

的解曲线。通过 D 内各点仅存在着唯一的解曲线, 见图 22.1。现在把每一条解曲线延拓到 D 的边界, 它的全体就一重地复盖着 D 。根据 (22.3), 可以认为这些曲线 (当 x 减少时) 是由 $x=a$ 上的点出发的, 而在 D 内部延长。令在 $x=a$ 上出发的点为 $(x, y) = (a, \eta)$, 则曲线的方程可以写成

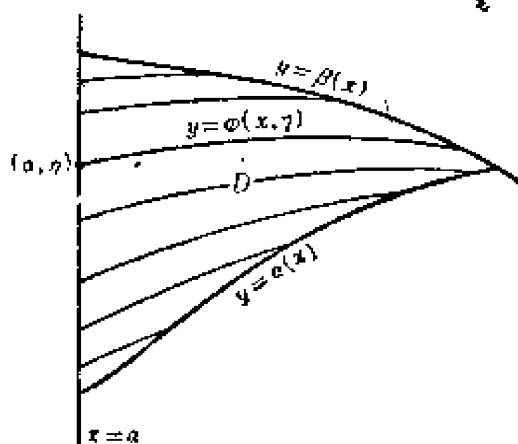


图 22.1

$$y = \varphi(x, \eta) \quad [\varphi(a, \eta) = \eta]. \quad (22.17)$$

用 (22.17) 能够作成 (x, y) 的区域 D 与 (x, η) 的区域 D^* 之间的一一对应 (连续并可微)。对 D^* 来说, 由于 (22.17) 所表示的特征曲线具有方程 $\eta = \text{常数}$, 所以与它相对应的特征方程 (22.16) 就变成了

$$\frac{d\eta}{dx} = 0.$$

但是以 (x, η) 代替 (x, y) 作为独立变数时, 微分方程 (22.7) 成为

$$\partial_x u = f(x, \varphi(x, \eta)). \quad (22.18)$$

于是当 $x=a$ 时, 满足 $u=\varphi(\eta)$ 的解是

$$u(x, \eta) = \varphi(\eta) + \int_a^x f(\xi, \varphi(\xi, \eta)) d\xi. \quad (22.19)$$

由(22.5)及(22.6)有

$$|u(x, \eta)| \leq \varepsilon + \int_a^x g(\xi) d\xi. \quad (22.20)$$

由(22.17)把 η 解出成为 (x, y) 的函数 ($\varphi_\eta \neq 0$), 并取

$$\eta = \psi(x, y), \quad (22.21)$$

因为

$$u(x, y) = u(x, \eta)_{\eta=\psi(x, y)}, \quad (22.22)$$

所以根据(22.20)可知(22.8)应该成立。

* 再设 η 为常数, 因为(22.17)是(22.16)的解, 即有

$$\varphi_x(x, \eta) + \lambda(x, \varphi(x, \eta)) = 0.$$

把方程对 η 微分, 就有

$$\partial_x \varphi_\eta + \lambda_y(x, \varphi) \varphi_\eta = 0.$$

但是由于 $\varphi_\eta(a, \eta) = 1$, 所以有

$$\varphi_\eta(x, \eta) = \exp \left\{ - \int_a^x \lambda_y(\xi, \varphi(\xi, \eta)) d\xi \right\}. \quad (22.23)$$

此外, 由关系式(22.17)及(22.21), 所以有

$$\varphi(x, \psi(x, y)) = y,$$

即

$$\varphi_\eta(x, \eta)_{\eta=\psi} \cdot \psi_y(x, y) = 1.$$

于是由(22.23)而有

$$\psi_y(x, y) = \exp \left\{ \int_a^x \lambda_y(\xi, \varphi(\xi, \eta)) d\xi \right\}_{\eta=\psi}. \quad (22.24)$$

另由(22.19)及(22.22)有

$$\begin{aligned} \partial_y u(x, y) &= u_\eta(x, \eta)_{\eta=\psi} \cdot \psi_y(x, y) \\ &= \left\{ \varphi'(\eta) + \int_a^x f_y(\xi, \varphi(\xi, \eta)) \cdot \varphi_\eta(\xi, \eta) d\xi \right\}_{\eta=\psi} \cdot \psi_y(x, y). \end{aligned} \quad (22.25)$$

再根据(22.23)及(22.24)有

$$\psi_y(x, y) \varphi_\eta(\xi, \eta) = \exp \left\{ \int_\xi^x \lambda_y(t, \varphi(t, \eta)) dt \right\},$$

所以由(22.25)有

$$\begin{aligned} u_y(x, y) = & \left[\varphi'(\eta) \exp \left\{ \int_\eta^x \lambda_y(\xi, \varphi(\xi, \eta)) d\xi \right\} \right]_{\eta=\psi} \\ & + \left[\int_a^x \exp \left\{ \int_\xi^x \lambda_y(t, \varphi(t, \eta)) dt \right\} f_y(\xi, \varphi(\xi, \eta)) d\xi \right]_{\eta=\psi}, \end{aligned}$$

最后由(22.4), (22.5), (22.6)就能证明(22.9)。

3. 导函数收敛的证明 现在来证明 $\partial_y u_i^{(n)}$ 一致收敛。为了这个目的, 先取常数 M , 使得

$$|\varphi'(y)| \leq M, \quad |\partial_y f_i(x, y, u)| \leq M. \quad (22.26)$$

我们先证, 存在着适当的常数 $K > L$, 使得对于一切的 $n (\geq 0)$, 在区域 D 内成立

$$|\partial_y u_i^{(n)}(x, y)| \leq M e^{K(x-a)}. \quad (22.27)$$

这个公式当 $n=0$ 时是显然的, 设(22.27)对某个自然数 n 已经成立, 由(22.26)就有

$$\begin{aligned} |\partial_y \{f_i(x, y, u^{(n)}(x, y))\}| & \leq |\partial_y f_i| + \sum_{j=1}^m |\partial_{u_j} f_i| \cdot |\partial_y u_j^{(n)}| \\ & \leq M + mH M e^{K(x-a)} \leq M(1+mH) e^{K(x-a)}. \end{aligned}$$

于是由定理 22.1 有

$$\begin{aligned} |\partial_y u_i^{(n+1)}| & \leq M + \int_a^x M(1+mH) e^{L(x-t)} e^{K(t-a)} dt \\ & = M + M(1+mH) e^{L(x-a)} \int_a^x e^{(K-L)(t-a)} dt \\ & < M(2+mH) (K-L)^{-1} e^{K(x-a)}. \end{aligned}$$

取 $K = L + 2 + mH$ 后, 立刻就能看出, 如在(22.27)中以 $n+1$ 代替 n , 则关系式仍成立。因此(22.27)对一切的自然数 n 恒成立。

現在証明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\partial_y u^{(n)}$ 一致收敛。为此, 設

$$\text{Max}_{i=(x,y) \in D} \text{Max} \{ |\partial_y (u_i^{(n)} - u_i^{(n')})| e^{-K(x-a)} \} = \gamma_{n,n'}. \quad (22.28)$$

由于

$$|\partial_y (u_i^{(n)} - u_i^{(n')})| \leq \gamma_{n,n'} e^{K(x-a)}, \quad (22.29)$$

所以只要証明 $\lim_{n,n' \rightarrow \infty} \gamma_{n,n'} = 0$ 即可。此外由于 $\partial_y f_i, \partial_{u_j} f_i$ 是 (x, y, u)

的連續函数, 而 $u_j^{(n)}$ 是一致收敛的, 所以对任意小的 $\varepsilon > 0$, 只要 n, n' 相当大, 就成立

$$\left. \begin{aligned} |(\partial_y f_i)_n - (\partial_y f_i)_{n'}| &< \varepsilon, \\ |(\partial_{u_j} f_i)_n - (\partial_{u_j} f_i)_{n'}| &< \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (n, n' > N(\varepsilon)) \quad (22.30)$$

这里 $(\)_n$ 表示取其中的 $u = u^{(n)}$ 。

現在 $u_i = u_i^{(n+1)} - u_i^{(n'+1)}$ 是微分方程

$$\partial_x u_i = \lambda_i(x, y) \partial_y u_i + \{ (f_i)_n - (f_i)_{n'} \} \quad (22.31)$$

滿足初始条件 “ $x=a$ 时, $u_i=0$ ” 的解。因此由 (22.29), (22.30) 及 (22.27) 有

$$\begin{aligned} & |\partial_y \{ (f_i)_n - (f_i)_{n'} \} | \\ & \leq |(\partial_y f_i)_n - (\partial_y f_i)_{n'}| + \sum_{j=1}^m |(\partial_{u_j} f_i)_n - (\partial_{u_j} f_i)_{n'}| \cdot |\partial_y u_j^{(n)}| \\ & \quad + \sum_{j=1}^m |(\partial_{u_j} f_i)_{n'}| \cdot |\partial_y (u_j^{(n)} - u_j^{(n')})| \\ & < \varepsilon + \varepsilon m M e^{K(x-a)} + m H \gamma_{n,n'} e^{K(x-a)} \\ & \leq \{ \varepsilon (1 + m M) + m H \gamma_{n,n'} \} e^{K(x-a)}. \end{aligned} \quad (22.32)$$

于是根据定理 (22.1) (其中的 $\varepsilon' = 0$), 有

$$\begin{aligned} & |\partial_y (u_i^{(n+1)} - u_i^{(n'+1)})| \\ & \leq \int_a^x e^{L(x-\xi)} \{ \varepsilon (1 + m M) + m H \gamma_{n,n'} \} e^{K(\xi-a)} d\xi \\ & < (K - L)^{-1} \{ \varepsilon (1 + m M) + m H \gamma_{n,n'} \} e^{K(x-a)}, \end{aligned}$$

但是根据定义 (22.28) (令 $K - L = 2 + m H$), 对 $\gamma_{n+1, n'+1}$ 成立着下列不等式:

$$\gamma_{n+1, n'+1} \leq \varepsilon \frac{1+mM}{2+mH} + \frac{mH}{2+mH} \gamma_{n, n'}. \quad (22.33)$$

令 $\sup_{n, n' \geq \nu} (\gamma_{n, n'}) = \bar{\gamma}_\nu$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_\nu = \gamma$, 则由 (22.33) 有

$$\bar{\gamma}_{\nu+1} \leq \varepsilon \frac{1+mM}{2+mH} + \frac{mH}{2+mH} \bar{\gamma}_\nu,$$

所以当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\gamma \leq \frac{1+mM}{2+mH} \varepsilon + \frac{mH}{2+mH} \gamma,$$

即

$$\gamma \leq \frac{1+mM}{4+2mH} \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意小的数, 所以

$$\lim_{n, n' \rightarrow \infty} \gamma_{n, n'} = \gamma = 0.$$

这样就证明了 $\partial_y u_i^{(n)}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的一致收敛性。此外由于

$$\partial_x u_i^{(n)} = \lambda_i(x, y) \partial_y u_i^{(n)} + f_i(x, y, u^{(n)}), \quad (22.34)$$

所以可以理解, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\partial_x u_i^{(n)}$ 也一致收敛。于是 $u_i^{(n)}$ 的极限 $u_i(x, y)$ 连续可微分, 并且由 (22.34) 取 $n \rightarrow \infty$ 的极限, 有

$$\partial_x u_i(x, y) = \lambda_i(x, y) \partial_y u_i(x, y) + f_i(x, y, u(x, y)).$$

对于满足初始条件的解的唯一性, 可以如下地得到证明。设 $u_i(x, y)$, $u'_i(x, y)$ 都是“当 $x=a$ 时, $u_i = \varphi_i(y)$ ”的解。令 $u_i = u_i(x, y) - u'_i(x, y)$, 那么 u_i 就是方程

$$\begin{aligned} \partial_x u_i &= \lambda_i(x, y) \partial_y u_i \\ &+ \{f_i(x, y, u(x, y)) - f_i(x, y, u'(x, y))\} \end{aligned} \quad (22.35)$$

满足条件“ $x=a$ 时 $u_i=0$ ”的解。现在令

$$\text{Max}_i \text{Max}_{(x, y) \in D} \{|u_i(x, y) - u'_i(x, y)| e^{-K(x-a)}\} = \gamma, \quad (22.36)$$

则

$$|f_i(x, y, u(x, y)) - f_i(x, y, u'(x, y))| \leq mH \gamma e^{K(x-a)}. \quad (22.37)$$

因此对(22.35)的解 $u_4 = u_4(x, y) - u'_4(x, y)$ 适用定理 22.1, 从而有

$$|u_4(x, y) - u'_4(x, y)| \leq \int_a^x mH\gamma e^{K(x-\xi)} d\xi < K^{-1}mH\gamma e^{K(x-a)},$$

于是由(22.36)有

$$\gamma \leq K^{-1}mH\gamma. \quad (22.38)$$

如取 $K = 2mH$, 则得 $\gamma = 0$, 即

$$u_4(x, y) = u'_4(x, y).$$

4. 决定区域, 适切的决定条件 综合前节及本节中的结果可得下面的定理。

定理 22.2 设 $A_{ij}(x, y)$ 在 (x^0, y^0) 的某一邻域中二次连续可微, $f_i(x, y, u)$ 在 (x^0, y^0, u^0) 的某一邻域中一次连续可微, $\varphi_i(y)$ 在 y^0 的某一邻域中一次连续可微, 并设 $\varphi_i(y^0) = u_i^0$. 此外, 如果(21.10)具有相异实根的话, 则方程(21.1)在 (x^0, y^0) 的邻域中具有唯一的满足初始条件 $x = x^0$ 时 $u_i = \varphi_i(y)$ 的解 $u_i = u_i(x, y)$.

现在考查一下由初始条件决定的解的决定区域。首先把矩阵 (A_{ij}) 的本征值, 依照大小的次序排列如下:

$$\lambda_1(x, y) < \lambda_2(x, y) < \cdots < \lambda_m(x, y).$$

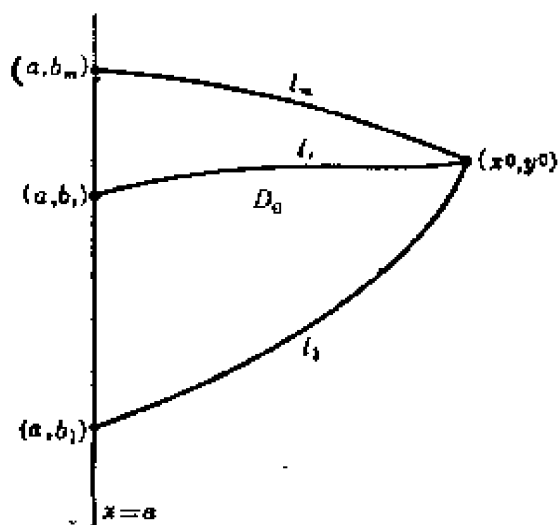


图 22.2

设在直线 $x=a$ 的右侧 ($x > a$) 任取一点 (x^0, y^0) , 存在着 m 条通过 (x^0, y^0) 的特征曲线 l_1, \dots, l_m (l_i 是 $y' = -\lambda_i(x, y)$ 的解曲线)。设 l_i 与 $x=a$ 的交点为 (a, b_i) . 那么当 x 在闭区间 $[a, x_0]$ 中变化时, 按由下而上的顺序来数特征线, 应该是 l_1, \dots, l_m .

設 l_1, l_m 与 $x=a$ 圍成的区域为 D_0 (图 22.2)。如果注意到(21.1)经过变换(21.3)后变成了标准型,那么就可以了解, u_i 在 D_0 内点的值, 由仅与直綫 $x=a$ 上开区間 (b_1, b_m) 中的 y 有关的始值 $u_i = \varphi_i(y)$ 所唯一决定(参看本节中唯一性的証明, 在定理 22.1 中, $y = \alpha(x)$ 是方程 $y' = -\lambda_1(x, y)$ 通过 (x^0, y^0) 点的解曲綫, $y = \beta(x)$ 是方程 $y' = -\lambda_m(x, y)$ 通过 (x^0, y^0) 的解曲綫)。即 D_0 是綫段 $x=a, b_1 < y < b_m$ (在 $x > a$ 的一側)的决定区域。

现在利用定理 22.1 来証明解对于始值的連續性。先考虑把方程变成标准型。再設 $u_i(x, y)$ 及 $u'_i(x, y)$ 是方程(22.1)在 $x=a$ 上相当接近的解, 即

$$|u_i(a, y) - u'_i(a, y)| < \varepsilon, \quad (22.39)$$

那么 $u_i = u_i(x, y) - u'_i(x, y)$ 就滿足(22.35)。如用(22.36)来定义 γ , 則(22.37)成立。由定理 22.1, 代替(22.38), 就有

$$\begin{aligned} |u_i(x, y) - u'_i(x, y)| &< \varepsilon + \int_a^x mH\gamma e^{K(x-\xi)} d\xi \\ &\leq (\varepsilon + K^{-1}mH\gamma)e^{K(x-a)}. \end{aligned}$$

如置 $K = 2mH$, 則根据 γ 的定义, 有

$$\gamma \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\gamma,$$

即 $\gamma \leq 2\varepsilon$. 于是在 D_0 内有

$$|u_i(x, y) - u'_i(x, y)| \leq 2\varepsilon e^{2mH(x-a)}.$$

当方程(21.1)是橢圓型的时候, 結論与双曲型的情形完全不同。我們考虑一个最简单的情形, 即 Cauchy-Riemann 方程

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_x v = -\partial_y u. \quad (22.40)$$

这时, 滿足条件“ $x=0$ 时, $u = \varphi(y), v = 0$ ”的解, 仅当 $\varphi(y)$ 为解析函数时才能存在 (§ 2 注意 2)。而且解不具有对始值的連續性。事实上, 譬如取

$$u = n^{-k}(e^{nx} + e^{-nx}) \cos ny,$$

$$v = n^{-k}(e^{nx} - e^{-nx}) \sin ny$$

为(22.40)的解,并有始值条件“ $x=0$ 时, $u=2n^{-k} \cos ny \equiv \varphi_n(y)$, $v=0$ ”. 这个始值函数 $\varphi_n(y)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时一致收敛于0. 但是对于 $x \neq 0$, 则

$$u^2 + v^2 = 2n^{-2k}(e^{2nx} + e^{-2nx} + \cos^2 ny + \sin^2 ny),$$

它当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 ∞ . (在 $x=0$ 上, $\varphi_n(y)$ 以及它直到 $k-1$ 阶的导数都一致收敛于0. 此外如取 $n^{-\sqrt{n}}$ 代替 n^{-k} , 则当 $x=0$ 时, $\varphi_n(y)$ 的各阶导数都一致收敛于0, 但对 $x \neq 0$, 就有 $u^2 + v^2 \rightarrow \infty$.)

一般地说,对于已知的偏微分方程,如果作为决定解的条件能够使下列三点成立,那么就說这个条件是适切的:

- (i) 满足这个条件的解存在(存在性)。
- (ii) 满足这个条件的解仅有一个(唯一性)。
- (iii) 解相关于条件中給定的值的(在适当的意义下)連續依賴性(連續性)。

所以对双曲型的情形,初始条件(在决定区域中)是适切的,但是对 Cauchy-Riemann 方程,初始条件就不是适切的了。此外,对 Laplace 方程 $\Delta u = 0$, 初始条件也不适切,但是边界条件是适切的。(对圆的情形已在 § 20 中討論过,对閉曲綫所圍的单連通区域,可以用保角映象(直到圓周連續)变成圓的情形来討論。)

第5章 一般二阶綫性偏微分方程

本章将对二个以上独立变数的二阶偏微分方程, 主要是对綫性的情形, 作某些一般性的叙述。在本章中并不規定一切的变数都是实数, 对函数仅假設在适当的範圍內具有相当阶数(一般二阶)的連續导数。此外还将对特征曲面及 Green 公式等作一般性的討論。对于每个类型的較深入的問題将留待下章来研究。

現在先解釋一下所用的記号: 独立变数 x 一般表示的是 m 个实变数 (x_1, \dots, x_m) , ∂u 及 $\partial_{ij}^2 u$ 具有在本书开头所作的解釋。此外, 如取 $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ 代替 x 作为独立变数, 那么 $\partial'_i u$ 就表示 $\partial u / \partial x'_i$, $\partial_{ij}^2 u$ 表示 $\partial^2 u / \partial x'_i \partial x'_j$ 。其次, 对 $\partial_x \varphi \neq 0$ ($\neq 0$) 应理解为 $(\partial_1 \varphi, \dots, \partial_m \varphi) \neq (0, \dots, 0)$ ($\neq (0, \dots, 0)$)。

§ 23 关于二阶綫性方程独立变数的变换

1. 独立变数的变换 設以 $L[u]$ 表示对任意函数 $u(x)$ 的下列微分算子

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^m b_i(x) \partial_i u + c(x)u, \quad (23.1)$$

这里 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ 。如把独立变数由 x 变成 x' , 由于

$$\left. \begin{aligned} \partial_i u &= \sum_{\mu=1}^m \partial'_\mu u \partial_i x'_\mu, \\ \partial_{ij}^2 u &= \sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} \partial'^2_{\mu\nu} u \partial_i x'_\mu \partial_j x'_\nu + \sum_{\mu=1}^m \partial'_\mu u \partial_{ij}^2 x'_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

則 $L[u]$ 变成下式

$$L[u] = \sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} a'_{\mu\nu} \partial'^2_{\mu\nu} u + \sum_{\mu=1}^m b'_\mu \partial'_\mu u + cu, \quad (23.3)$$

为了得到 $a'_{\mu\nu}$ 的表达形式, 对于任意函数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$, 引入下面的运算符号

$$Q(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x) \partial_i \varphi \partial_j \psi.$$

使用了这种符号, 并由 (23.2) 就有

$$a'_{\mu\nu} = Q(x'_\mu, x'_\nu). \quad (23.4)$$

对 $Q(\varphi, \psi)$ 能够证明它对独立变数的变换是不变的。事实上, 由 (23.4) 有

$$\begin{aligned} Q'(\varphi, \psi) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} a'_{\mu\nu} \partial'_\mu \varphi \partial'_\nu \psi \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} \left(\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i x'_\mu \partial_j x'_\nu \right) \partial'_\mu \varphi \partial'_\nu \psi \\ &= \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \left(\sum_{\mu=1}^m \partial_i x'_\mu \partial'_\mu \varphi \right) \left(\sum_{\nu=1}^m \partial_j x'_\nu \partial'_\nu \psi \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i \varphi \partial_j \psi = Q(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

2. 分离时间变数 设对于函数 $\varphi_1(x)$ 成立着

$$Q(\varphi_1, \varphi_1) \neq 0, \quad (23.5)$$

这时可另取 $m-1$ 个函数 $\varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ 使得

$$Q(\varphi_1, \varphi_\nu) = 0 \quad (\nu = 2, \dots, m), \quad (23.6)$$

并且

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \neq 0. \quad (23.7)$$

令

$$x'_\mu = \varphi_\mu(x) \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

这样把独立变数由 x 变成 x' , 由于

$$a'_{11} = Q(\varphi_1, \varphi_1) \neq 0,$$

$$a'_{1\nu} = Q(\varphi_1, \varphi_\nu) = 0 \quad (\nu = 2, \dots, m),$$

因此以 x' 为独立变数的微分方程

$$L[u] = f(x), \quad (23.8)$$

将成为不含 $\partial_{x_1}^2 u$ ($\nu \geq 2$) 的形状。现在把 x_1' 写成 t , 就有

$$\begin{aligned} \tilde{L}[u] = & \partial_{tt}^2 u + \tilde{b} \partial_t u + \sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} \tilde{a}_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 u \\ & + \sum_{\mu=2}^m \tilde{b}_\mu \partial_\mu u + \tilde{c} u = \tilde{f}(t, x'). \end{aligned} \quad (23.9)$$

为了得到满足 (23.6) 及 (23.7) 的 φ_ν , 可令

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j \varphi_1 = P_i(x), \quad (23.10)$$

由于 $\sum_{i=1}^m P_i \partial_i \varphi_1 = Q(\varphi_1, \varphi_1) \neq 0$, 就有 $(P_1, \dots, P_m) \neq (0, \dots, 0)$,

故 w 的一阶齐次线性方程

$$Q(\varphi_1, w) = \sum_{i=1}^m P_i(x) \partial_i w = 0$$

具有 $m-1$ 个独立解 $w = \varphi_2, \dots, \varphi_m$. 这样就能使 (23.6) 成立, 且

$$\text{Rk}(\partial_i \varphi_\nu \quad i=1, \dots, m) = m-1. \quad (23.11)$$

现在来证明 (23.7) 成立。设在某一点 $x = x^0$ 处

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)_{x=x^0}} = 0,$$

则由 (23.11) 可知存在着 c_2, \dots, c_m , 使得

$$\partial_j \varphi_1(x^0) = \sum_{\nu=2}^m c_\nu \partial_j \varphi_\nu(x^0) \quad (j=1, \dots, m),$$

从而由 (23.6) 有

$$\begin{aligned} Q(\varphi_1, \varphi_1)_{x=x^0} &= \left\{ \sum a_{ij} \partial_i \varphi_1 \left(\sum_{\nu=2}^m c_\nu \partial_j \varphi_\nu \right) \right\}_{x=x^0} \\ &= \sum_{\nu=2}^m c_\nu Q(\varphi_1, \varphi_\nu) = 0. \end{aligned}$$

它与 (23.5) 矛盾。因此 (23.7) 必需成立。

此外, 为了消去 (23.8) 中含 $\partial_t u$ 的项, 可设

$$u = \lambda w,$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{L}[u] = & \lambda \left(\partial_{tt}^2 v + \sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} \tilde{a}_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^{\prime 2} v \right) + (2\lambda_t + \tilde{b}\lambda) \partial_t v \\ & + \sum_{\mu=2}^m \left(\tilde{b}_\mu \lambda + 2 \sum_{\nu=2}^m \tilde{a}_{\mu\nu} \tilde{c}'_\nu \lambda \right) \partial'_\mu v + \tilde{L}[\lambda] v = \tilde{f}(t, x').\end{aligned}$$

如置

$$\lambda = \exp \left(-\frac{1}{2} \int \tilde{b} dt \right) \quad (\neq 0), \quad (23.12)$$

则就得到除去 ∂_{tt}^2 以外, 不再含有其他对 t 导数的方程, 即

$$\partial_{tt}^2 v + \sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} A_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^{\prime 2} v + \sum_{\mu=2}^m B_\mu \partial'_\mu v + C v = F, \quad (23.13)$$

这里 $A_{\mu\nu}$, B_μ , C , F 一般是 (t, x'_2, \dots, x'_m) 的函数。

注意 如果仅考虑主部的形式, 则本节中的结果对半线性方程也成立。

§ 24 特征面

对于 $\varphi(x) = 0$ ($\partial_x \varphi \neq 0$) 所表示的曲面 ($m-1$ 维流形), 如果在某一点 $x = x^0$ 处满足

$$Q(\varphi, \varphi)|_{x=x^0} = 0$$

的话, 那么就說曲面 $\varphi(x) = 0$ 在 $x = x^0$ 处有特征点。如果曲面 $\varphi(x) = 0$ 上的每一点都是特征点, 则称曲面 $\varphi(x) = 0$ 为特征面。这个定义和 § 3 中所給的定义完全一致。如果曲面 $\varphi_1(x) = 0$ 上某一点 $x = x^0$ 不是特征, 那么在 x^0 的邻域可选择 $m-1$ 个满足条件 $D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) / D(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ 的函数 $\varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, 当用 $x'_\mu = \varphi_\mu(x)$ ($\mu = 1, \dots, m$) 把独立变数由 x 变成 x' 时, 由于 $a'_{11} = Q(\varphi_1, \varphi_1) \neq 0$, 所以就把方程 (23.8) 变成了基准型 (即已解出 $\partial_{11}^{\prime 2} u$ 的形状) 方程

$$\partial_{11}^{\prime 2} u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^m a'_{ij} \partial_{ij}^{\prime 2} u + \sum_{i=1}^m b'_i \partial'_i u + c' u + f'(x').$$

(根据前节的讨论, 它还可以变成 (23.9) 甚至 (23.13) 的形状。) 但

如 $\varphi(x)=0$ 在 $x=x^0$ 处有特征, 那么就不能变成这种形状。

設 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ 是 m 个任意的实数, 考虑二次型

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j. \quad (24.1)$$

如果 (24.1) 在 $x=x^0$ 处是定号的 (即对 $\xi \neq 0$ 恒正或恒负), 那么只要 $\partial_x \varphi \neq 0$, 就有 $Q(\varphi, \varphi) \neq 0$, 也就是說曲面 $\varphi(x)=0$ 在 $x=x^0$ 处沒有特征。这时我們說, $L[u]$ 在 $x=x^0$ 处为椭圆型。相反的, 如果在 $x=x^0$ 处 (24.1) 是变号的 (对 ξ 可正可负), 并且为非蜕化的, 即

$$|a_{ij}|_{j=1, \dots, m, i=1, \dots, m} \neq 0, \quad (24.2)$$

那末我們說 $L[u]$ 在 $x=x^0$ 处为广义双曲型。这时, 含有点 $x=x^0$ 的特征面是实曲面

事实上, 这时存在着 ξ^0 , 使得

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x^0) \xi_i^0 \xi_j^0 = 0, \quad \xi^0 \neq 0. \quad (24.3)$$

因此, 如令

$$F(x, p) \equiv \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x) p_i p_j, \quad (24.4)$$

則一阶偏微分方程

$$Q(u, u) \equiv F(x, p) \equiv 0 \quad (p = \partial_x u) \quad (24.5)$$

具有含面素 $(x, u, p) = (x^0, 0, \xi^0)$ 的解 $u = \varphi(x)$. (見注意 1) 由于 $Q(\varphi, \varphi) = 0$, $\varphi(x^0) = 0$, $\partial_x \varphi(x^0) = \xi^0 \neq 0$, 所以 $\varphi(x) = 0$ 是包含点 x^0 的特征面。

此外, 如果 $|a_{ij}(x^0)|_{j=1, \dots, m, i=1, \dots, m} = 0$, 那么就說 $L[u]$ 在 $x=x^0$ 处为广义抛物型。

特征面的条件是 $\varphi(x) = 0$ 及 $Q(\varphi, \varphi) = 0$. 如果存在着 $\varphi(x)$, 使得 $Q(\varphi, \varphi) = 0$ (仅設 $\partial_x \varphi \neq 0$) 恒等地成立, 那么 $\varphi(x) = c$ (c 任意

常数) 所表示的曲面族都是特征面。现在我们来证明, 如 $\varphi_0(x) = 0$ ($\partial_x \varphi_0 \neq 0$) 是特征面, 那么存在着包含它的特征曲面族 $\varphi(x) = c$. 设 (24.2) 成立。在满足 $\varphi_0(x^0) = 0$ 的点 x^0 的邻域中, 不失一般性可设 $\partial_1 \varphi_0 \neq 0$. 这样, 曲面 $\varphi_0(x) = 0$ 在这点的邻域就能写成下面的样子:

$$x_1 = \psi_0(x_2, \dots, x_m). \quad (24.6)$$

现在简单地记 $(x_2, \dots, x_m) = \dot{x}$, 并设

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{x}, u, p) = & a_{11}(u, \dot{x}) - 2 \sum_{\nu=2}^m a_{1\nu}(u, \dot{x}) p_\nu \\ & + \sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} a_{\mu\nu}(u, \dot{x}) p_\mu p_\nu, \end{aligned} \quad (24.7)$$

由于 $\partial_\nu \psi_0 = -(\partial_\nu \varphi_0, \partial_1 \varphi_0)_{x_1=\psi_0}$, 所以

$$\Phi(\dot{x}, \psi_0, \partial_x \psi_0) = \{Q(\varphi_0, \varphi_0) (\partial_1 \varphi_0)^{-2}\}_{x_1=\psi_0} = 0,$$

即 $u = \psi_0$ 是一阶偏微分方程

$$\Phi(\dot{x}, u, p) = 0 \quad (p = \partial_x u) \quad (24.8)$$

的解。如假定 $\Phi_{p_1} \neq 0$ (见注意 2), 那么 (24.8) 就在 $x = x^0$ 的邻域具有满足条件

$$x_2 = x_2^0 \text{ 时, } u = \psi_0(x_2^0, x_3, \dots, x_m) + c$$

的解 (c 相当小)。令这解为 $u = \psi(x_2, \dots, x_m, c)$, 由于 $\psi_c \neq 0$, 所以可在

$$x_1 = \psi(x_2, \dots, x_m, c) \quad (24.9)$$

中解出 c , 而得到

$$c = \varphi(x_1, \dots, x_m). \quad (24.10)$$

但是由于 $\varphi(x)_{x_1=\psi} = c$ (恒等式), 所以

$$\partial_\nu \psi = -(\partial_\nu \varphi, \partial_1 \varphi)_{x_1=\psi} \quad (\nu = 2, \dots, m).$$

于是有

$$Q(\varphi, \varphi)_{x_1=\psi} = (\partial_1 \varphi)^2 \Phi(\dot{x}, \psi, \partial_x \psi) = 0. \quad (24.11)$$

再由 (24.9) 与 (24.10) 等关系, 所以 $(\psi)_{c=\varphi} = x_1$ 恒等地成立, 因此

在(24.11)中令 $c = \varphi$ 后,就恒等地成立

$$Q(\varphi, \varphi) = 0. \quad (24.12)$$

此外,由于 $\psi(\dot{x}, 0) = \dot{\psi}_0(\dot{x})$, 所以 $\varphi(x) = 0$ 与 $x_1 = \psi_0(x)$ 是等价的,从而它与 $\varphi_0(x) = 0$ 表示着同一曲面。

注意 1 对(24.4)所定义的 F , 有

$$F_{p_i} = 2 \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) p_j.$$

因此,如果 $F_{p_i}(x^0, \xi^0) = 0 \quad (i=1, \dots, m)$, 则有

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(x^0) \xi_j^0 = 0 \quad (i=1, \dots, m),$$

由于 $\xi^0 \neq 0$, 所以非成立如下的条件不可

$$|a_{ij}(x^0) \quad i=1, \dots, m; j=1, \dots, m| = 0.$$

因此,假定所讨论的是(24.2)的情形,那么 $F_{p_i}(x^0, \xi^0)$ 就不能都等于 0. 为了便利起见可设 $F_{p_1}(x^0, \xi^0) \neq 0$, 这样关于 $x_1 = x_1^0$ 的初始面素组将含有面素 $(x, u, p) = (x^0, 0, \xi^0)$. 如再设它满足方程 $F(x, u, p) = 0$, 那就得到了方程(24.4)含有面素 $(x^0, 0, \xi^0)$ 的解 $u = \varphi(x)$ (见 § 12)。

注意 2 由(24.7)有

$$\Phi_{p_i} = 2 \left(\sum_{j=2}^m a_{ij} p_j - a_{1i} \right). \quad (24.13)$$

又因为

$$\Phi = \sum_{i=2}^m \left(\sum_{j=2}^m a_{ij} p_j - a_{1i} \right) p_i + a_{11} - \sum_{j=2}^m a_{1j} p_j, \quad (24.14)$$

所以在 $x = x^0$ 处,如有

$$(\Phi_{p_i})_{\psi_0, x=x^0} = 0 \quad (i=2, \dots, m)$$

[() _{ψ_0} 表示在括号内取 $(u, p) = (\psi_0, \partial_x \psi_0)$], 那么由 $(\Phi)_{\psi_0} = 0$ 及(24.13), (24.14), 就有

$$\left(a_{11} - \sum_{j=2}^m a_{1j} p_j \right)_{\psi_0, x=x^0} = 0,$$

因此,只要令 $p_1 = -1$, 就得到

$$\left(\sum_{j=1}^m a_{ij} p_j \right)_{\psi_0, x=x^0} = 0 \quad (i=1, \dots, m).$$

从而有

$$|a_{ij}(x^0) \quad i=1, \dots, m; j=1, \dots, m| = 0.$$

这个结果显然与(24.2)矛盾。所以原来所作的假设 $\Phi_{p_i} = 0 \quad (i=2, \dots, m)$ 是

不合理的。

§ 25 橫截向量, 特征射綫

1. 橫截向量, 余法綫, 导数 对于曲面 $\varphi(x) = 0$ ($\partial_x \varphi \neq 0$) 上的任一点 $x = x^0$, 用公式

$$\xi_i = \lambda \sum_{j=1}^m a_{ij}(x^0) \partial_j \varphi(x^0) \quad (\lambda \neq 0) \quad (i=1, \dots, m) \quad (25.1)$$

所定义的向量 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ 叫做曲面在 x^0 处的橫截向量 (transversal vector)。特别是当 $a_{ij}(x^0) = a \delta_{ij}$ ($a \neq 0$) 时, $\varphi(x) = 0$ 在 x^0 处的橫截向量就和曲面在这点的法綫一致。

令 $n = (n_1, \dots, n_m)$ 代表曲面 $\varphi(x) = 0$ 在点 x^0 处, 并指向正侧 ($\varphi(x) > 0$) 的单位法綫, 则

$$n_i = \partial_i \varphi(x^0) / |\partial_x \varphi(x^0)| = \left(\partial_i \varphi / \sqrt{\sum_{j=1}^m \partial_j \varphi^2} \right). \quad (25.2)$$

現在用

$$N_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x^0) n_j = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x^0) \partial_j \varphi(x^0) / |\partial_x \varphi(x^0)| \quad (25.3)$$

定义的向量 $N = (N_1, \dots, N_m)$ 显然是 $\varphi(x) = 0$ 在 x^0 处的一个橫截向量。我們特別称它为 $\varphi(x) = 0$ 在 x^0 处的余法綫 (conormal)。

对于向量 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ 和任意函数 $u(x)$, 下列的极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x^0 + h\xi) - u(x^0)}{h} = \sum_{i=1}^m \xi_i \partial_i u(x^0)$$

叫做 $u(x)$ 在 $x = x^0$ 处关于 ξ 的方向导数, 并把它写成

$$\partial_\xi u(x^0) = \sum_{i=1}^m \xi_i \partial_i u(x^0). \quad (25.4)$$

当 N 是曲面 $\varphi(x) = 0$ 在 x^0 处的余法綫时, 由 (25.3) 有

$$\begin{aligned} \partial_N u(x^0) &= \sum_{i=1}^m N_i \partial_i u(x^0) \\ &= \{Q(\varphi, u) / |\partial_x \varphi|\}_{x=x^0} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}(x^0) \partial_i u(x^0) u_j, \quad (25.5)$$

它叫做 $u(x)$ 在 x^0 处 (对于曲面 $\varphi(x)=0$) 的余法綫导数。

习题 当二次型 (24.1) 为正定, 即 $\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \xi_i \xi_j > 0$ ($\xi \neq 0$) 时, 証明法綫与余法綫之間的夹角必小于直角。

2. 特征射綫 設 ξ 是曲面 $\varphi(x)=0$ 在 x^0 处的橫截向量, 由 (25.1) 有

$$\partial_i \varphi(x^0) = \sum_{i=1}^m \xi_i \partial_i \varphi(x^0) = \lambda Q(\varphi, \varphi)_{x=x^0}.$$

因此知道, $\varphi(x)=0$ 在 $x=x^0$ 处为特征的事实, 等价于在 x^0 处的橫截向量在此点与曲面 $\varphi(x)=0$ 相切。另外, 如果条件 (24.2) 成立, 并且 $\varphi(x)=0$ 为特征面, 那么存在着通过曲面上各点, 并落在 $\varphi(x)=0$ 上的橫截曲綫。事实上, 根据前节的討論, 只要討論恒等地成立 $Q(\varphi, \varphi)=0$ 即可。这时, 設方程

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) \partial_j \varphi(x) \quad (i=1, \dots, m) \quad (25.6)$$

滿足条件 “ $t=0$ 时, $x=x^0$ ($\varphi(x)=0$ 上的点)” 的解为 $x=x(t)$, 那么就有

$$\frac{d}{dt} \varphi(x(t)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi \cdot \frac{dx_i}{dt} = Q(\varphi, \varphi)_{x=x(t)} = 0.$$

于是 $\varphi(x(t)) = \varphi(x^0) = 0$, 这就是說 $x=x(t)$ 落在 $\varphi(x)=0$ 上, 亦即特征面包含着自己的橫截曲綫。因此我們称 (25.6) 的解曲綫 $x=x(t)$ 为特征射綫 (characteristic ray)。又因为特征射綫是定义在特征面上的一阶偏微分方程

$$Q(u, u) = F(x, p) \quad (p = \partial_x u) \quad (25.7)$$

的基础特征曲綫, 所以在这种意义下也叫特征射綫为双特征曲綫 (bicharacteristic curve)。

事实上, 如設

$$\varphi(x(t)) = u(t), \quad \partial_i \varphi(x(t)) = p_i(t),$$

首先由(25.2)与(24.4) ($p_i = \partial_i \varphi$)就有

$$\frac{dx_i}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j \varphi \right\}_{x=x(t)} = \frac{1}{2} \{F_{x_i}\}_{(x,p)=(x,p)(t)}, \quad (25.8)$$

于是有

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^m \left\{ \partial_i \varphi \frac{dx_i}{dt} \right\}_{x=x(t)} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i F_{p_i} \right\}_{(x,p)=(x,p)(t)}, \quad (25.9)$$

此外由于

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^m \partial_{ij}^2 \varphi(x(t)) \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j,k=1}^{m,m} (\partial_{ij}^2 \varphi \cdot a_{jk} \partial_k \varphi)_{x=x(t)},$$

以及

$$\partial_i \{Q(\varphi, \varphi)\} = \sum_{j,k=1}^{m,m} (\partial_i a_{jk} \cdot \partial_j \varphi \partial_k \varphi + 2a_{jk} \partial_{ij}^2 \varphi \cdot \partial_k \varphi) = 0,$$

所以得到

$$\sum_{j,k}^{m,m} \partial_{ij}^2 \varphi \cdot a_{jk} \partial_k \varphi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m,m} \partial_i a_{jk} \partial_j \varphi \partial_k \varphi = -\frac{1}{2} \{F_{x_i}\}_{p=\partial_x \varphi},$$

由此就有

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2} \{F_{x_i}\}_{(x,p)=(x,p)(t)}. \quad (25.10)$$

因为 F 中不含有 u , 所以由(25.4)、(25.5)、(25.6)就可以证明 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(t)$ 是(25.3)的特征带, 于是 $x=x(t)$ 是方程(25.7)的基础特征曲线。

特别当 $m=2$ 时, 一维的特征面是特征曲线, 它与特征射线(双特征曲线)完全一致。

当 a_{ij} 是常数时, $F(x, p)$ 仅含有 p , 而特征射线 = 双特征曲线则成为直线(见 § 11 的例 1)。

§ 26 Green 积分公式

1. 面积分与散度定理 这些事实在三维空间($m=3$)中已属

常識的範圍,因為我們要在一般的 m 維空間用到它,所以略加以說明。讀者如果感到對 m 維空間的理解有困難的地方,希望結合 $m=2, m=3$ 的特殊情形來進行思考。

設在 m 維空間有一平滑的曲面 Γ ($m-1$ 維流形),即對 Γ 任意點的鄰域部分,它的方程可表示成為 $m-1$ 個參數 $s=(s_1, \dots, s_{m-1})$ 的連續可微的函數

$$\left. \begin{aligned} x_i &= X_i(s_1, \dots, s_{m-1}) \quad (i=1, \dots, m), \\ \text{並且還滿足條件} \quad \text{Rk}(\partial_\mu X_i(s))_{\substack{i=1, \dots, m \\ \mu=1, \dots, m-1}} &= m-1. \end{aligned} \right\} \quad (26.1)$$

或可用 x 的連續可微函數 $\varphi(x)$ 表示為

$$\varphi(x)=0 \quad \text{而} \quad \partial_\alpha \varphi \neq 0.$$

對於 Γ 的表面積,如用(26.1)的表示法,並置

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= |\partial_\mu X_j|_{\substack{j=1, \dots, m-1, i+1, \dots, m \\ \mu=1, \dots, m-1}}, \\ \sigma &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}, \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

那末它可以寫成 $m-1$ 重的積分

$$S(\Gamma) = \int_{\Gamma} \sigma(s) d^{m-1}s.$$

這樣定義的 $S(\Gamma)$ 的值,對於參數變換是不變的,並且對於空間坐標 x 的合同變換(平行移動或綫性正交變換)也是不變的。特別當 Γ 是平面(即 $m-1$ 維綫性流形)的一部分時, $S(\Gamma)$ 與 Γ 的 $m-1$ 維體積(在 m 維空間內考慮為面積)完全一致。此外當 $m=3$ 時, $S(\Gamma)$ 表示通常曲面的面積,而當 $m=2$ 時,則表示曲綫 Γ 的長度。

現在對於定義在 Γ 上的函數 $\varphi(x) = \varphi(X(s))$,稱如下的 $m-1$ 重積分

$$\int_{\Gamma} \varphi(X(s)) \sigma(s) d^{m-1}s$$

为 Γ 上的面积分。令 $\sigma d^{m-1}s = dS_x$, 则它可以写成

$$\int_{\Gamma} \varphi(x) dS_x \quad \left(= \int \varphi(X(s)) \sigma(s) d^{m-1}s \right) \quad (26.3)$$

(可以把 dS_x 简写成 dS), 这个积分对于参数变换以及空间坐标的合同变换也是不变的。

此外, 如已知曲面 Γ 的方程为 $\varphi(x) = 0$ ($\partial_x \varphi \neq 0$), 并设 Γ 的单位法线向量为 $n = (n_1, \dots, n_m)$, 则

$$n_i = \varepsilon \partial_i \varphi / \sqrt{\sum_{i=1}^m (\partial_i \varphi)^2} \quad (i=1, \dots, m), \quad (26.4)$$

这里 $\varepsilon = \pm 1$, ε 可以根据法线指向 Γ 的某一侧, 而选定为 $+1$ 或 -1 。如 Γ 已给出为 (26.1) 的形状, 那么使用 (26.2) 的记号, 就有

$$n_i = \varepsilon' \sigma_i / \sigma \quad (\varepsilon' = \pm 1). \quad (26.5)$$

若有界区域 D 具有光滑的边界 Γ , 设 $n = (n_1, \dots, n_m)$ 是 Γ 的单位法线, 并指向 D 的外侧, 则对于在 $D \cup \Gamma$ 上连续可微的函数 $w(x)$ 成立下面的积分关系式:

$$\int_D \partial_i w d^m x = \int_{\Gamma} w(x) n_i dS.$$

这个公式对具有 m 个分量的向量函数 $W = \{w_1, \dots, w_m\}(x)$ 也适用, 这时应该成立

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^m \partial_i w_i \right) d^m x = \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^m w_i n_i \right) dS. \quad (26.6)$$

这个公式叫做散度定理 (参看本丛书, 几何学 § 23)。

注意 1 用向量分析中通常的写法, 所谓散度定理, 即指

$$\int_D \operatorname{div} W d^m x = \int_{\Gamma} W \cdot n dS,$$

即散度 ($\operatorname{div} W$) 的体积分 = 沿表面的通量 (flux) 面积分。

2. Green 积分公式 对于任意函数 $u(x)$, 容易把

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x) \partial_i^2 u + \sum_{i=1}^m b_i(x) \partial_i u + c(x) u \quad (26.7)$$

写成

$$\left. \begin{aligned} L[u] &= \sum_{i=1}^m \partial_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u \right) + \sum_{i=1}^m \beta_i \partial_i u + cu, \\ \text{这里} \quad \beta_i &= b_i - \sum_{j=1}^m \partial_j a_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (26.8)$$

在上面的形式中, 如果把 $\beta_i \partial_i u$ 换成 $-\partial_i(\beta_i u)$, 就得到了下面的式子:

$$L^*[u] = \sum_{i=1}^m \partial_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u \right) - \sum_{i=1}^m \partial_i(\beta_i u) + cu, \quad (26.9)$$

这个式子叫做 $L[u]$ 的伴随(微分)式。能够证明 L^* 的伴随式 L^{**} 与 L 一致, 特别当 $L^* \equiv L$, 即 $\beta_i = 0$ ($i=1, \dots, m$) 时, L 叫做自伴的。

对于任意函数 $u(x)$ 与 $v(x)$, 由 (26.8) 及 (26.9), 能够证明下式成立

$$vL[u] - uL^*[v] = \sum_{i=1}^m \partial_i \left\{ v \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u - u \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j v + \beta_i uv \right\}.$$

令

$$w_i = v \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u - u \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j v + \beta_i uv,$$

并利用散度定理 (26.6), 就得到

$$\int_D \{vL[u] - uL^*[v]\} d^n x = \int_{\Gamma} \{v \partial_N u - u \partial_N v + \beta_n uv\} dS, \quad (26.10)$$

这里

$$\partial_N \equiv \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} n_i \partial_j \quad (\text{余法线导数}), \quad \beta_n = \sum_{i=1}^m \beta_i n_i.$$

上面的公式叫做 **Green 积分公式**。

如 L 是自伴的, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \partial_i \left(v \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u \right) &= \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i v \partial_j u + v \sum_{i=1}^m \partial_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u \right) \\ &= Q(u, v) - cuv + vL[u], \end{aligned}$$

所以令 $w_i = v \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u$, 并利用(26.6), 就成立下面的公式:

$$\int_D \{Q(u, v) - cuv\} d^n x + \int_D v L[u] d^n x = \int_F v \partial_N u dS. \quad (26.11)$$

注意 2 用(26.7)来規定 $L[u]$ 时, 只要假設 a_{ij} 二次, b_i 一次連續可微, c 連續就够了。如用(26.8)的形状来規定 $L[u]$, 那么只需 a_{ij} 及 β_i 都一次連續可微即可。

习题 对(26.7), 証明

$$L^*[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} \partial_{ij}^2 (a_{ij} u) - \sum_{i=1}^m \partial_i (b_i u) + cu.$$

§ 27 广 义 解

設函数 $w(x)$ 在有界区域中直到相当高阶 (例如二阶) 連續可微, 并在离 D 的境界 F 相当近处恒等于 0, 則称这种函数为 D 的試驗函数 (test function)。設 $f(x)$ 是在 D 上的連續函数, 如果对于 D 的任意試驗函数 w , 恒有

$$\int_D f(x) w(x) d^n x = 0, \quad (27.1)$$

那末必在 D 内 $f(x) = 0$ (这个定理是变分学基本引理的推广)。

事实上, 如設在 D 内存在着一点 x^0 , 有 $f(x^0) \neq 0$, 于是 $f(x)$ 将在 $|x - x^0| < \rho$ ($|x - x^0| = \sqrt{\sum (x_i - x_i^0)^2}$) 内保持一定的符号。不失一般性可設在 $|x - x^0| < \rho$ 内 $f(x) > 0$ 。現在取試驗函数 $w(x)$, 使得 w 在 $|x - x^0| < \rho$ 内有 $w > 0$, 并当 $|x - x^0| \geq \rho$ 时, $w = 0$ 。譬如当 $|x - x^0| < \rho$ 时, 令 $w = \{\rho^2 - |x - x^0|^2\}^k$ ($k \geq 3$), 而当 $|x - x^0| \geq \rho$ 时, 令 $w = 0$ 即可。于是将有

$$\int_D f(x) w(x) d^n x > 0,$$

这个不等式与(27.1)矛盾。所以在 D 内 $f(x) = 0$ 。

設 $u(x)$ 在 D 内为微分方程

$$L[u] = f(x) \quad (27.2)$$

的解,并設 w 是关于 D 的試驗函数,把 Green 公式 (26.10) 应用于 u 与 w , 由于 w 与 $\partial_N w$ 在 Γ 的邻域恒等于 0, 所以对任意的 u 有

$$\int_D \{wL[u] - uL^*[w]\} d^m x = 0. \quad (27.3)$$

因此由 (27.2), 就成立下列公式

$$\int_D uL^*[w] d^m x = \int_D wf d^m x. \quad (27.4)$$

相反, 設函数 $u(x)$ 二次連續可微, 并且对于 D 的任意試驗函数 w , 公式 (27.4) 成立, 那么 u 必为方程 (27.2) 的解。这是因为根据 (27.4) 及 (27.3), 对于任意的試驗函数 w 成立着等式

$$\int_D w\{L[u] - f\} d^m x = 0.$$

所以根据变分学基本引理, u 满足方程 (27.2)。

一般的來說, 如果对于 D 的任意試驗函数 w , (27.4) 恒成立, 那么就叫 $u = u(x)$ 为 (27.2) 的广义解。对广义解, 不必限制它是二次可微, 甚至是全可微的函数。設一个具有相当高阶 (如二阶) 連續导数的函数序列 $\{u_n(x)\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 一致 (在适当意义下) 收敛于函数 $u_\infty(x)$, 同时 $L[u_n]$ 一致 (也在适当意义下) 收敛于 $f(x)$ 。这时, 由于对 D 的任意試驗函数 w 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \{wL[u_n] - u_nL^*[w]\} d^m x = \int_D \{wf - u_\infty L^*[w]\} d^m x,$$

所以由 (27.3) 可知必定成立

$$\int_D u_\infty L^*[w] d^m x = \int_D wf d^m x.$$

这就是說, u_∞ 是方程 (27.2) 的广义解。

譬如, 我們考虑波动方程

$$L[u] = u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (27.5)$$

如 φ, ψ 为二次連續可微函数, 則

$$u = \varphi(x+y) + \psi(x-y) \quad (27.6)$$

确实是(27.5)的解。如 φ, ψ 仅是連續函数(不一定存在导数), 那么(27.6)就是(27.5)的广义解。事实上, 这时存在着分別一致收敛于 φ, ψ 的函数序列 φ_n 及 ψ_n , 而 φ_n 及 ψ_n 都是二次連續可微的。因此, 由于 $u_n = \varphi_n(x+y) + \psi_n(x-y)$ 满足 $L[u_n] = 0$, 并且 u_n 一致收敛于 $u = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, 所以 u 是广义解。另外如果我们适当地規定收敛的意义, 則(27.5)可能有完全不連續的解。

因此对于波动方程來說, 存在着和它原来解意义完全不同的广义解。但是对 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 則不然, 这时所謂广义解必定就是原来的解(即解析正則的解)。

近年来, 在一般綫性偏微分方程的理論中, 广义解起着非常重要的作用。

注意 对于 D 內任意的試驗函数 w , 以方程(27.4)所定义的广义解特別称为弱解。这种解的导函数具有广义函数(即 Schwartz 所定义的 distribution)的意义。和它相对应的, 原来意义下解的极限函数, 即

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{而} \quad L[u_n] \rightarrow f \quad (\rightarrow \text{表示距离空間的强收敛})$$

所規定的广义解, 叫做强解。这是把微分算子 L 扩張成“閉算子”而产生的解。强解必是弱解, 但是相反是否成立, 这是一个非常困难的問題。此外, 原来意义的解也叫做方程的純正解(genuine solution)。

§ 28 二阶常系数方程的标准型

現在研究如何把系数 a_{ij}, b_i, c 是常数的綫性方程

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^m b_i \partial_i u + cu = f(x) \quad (28.1)$$

經過变换变成标准型的問題。用綫性变换

$$x'_\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_{\mu i} x_i \quad (28.2)$$

把独立变数 x 变成 x' , 这时, 方程(28.1)变成

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\mu, \nu=1}^{m, m} a'_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 u + \sum_{\mu=1}^m b'_\mu \partial_\mu u + cu = f(x'), \\ & a'_{\mu\nu} = \sum_{i, j=1}^{m, m} a_{ij} \alpha_{\mu i} \alpha_{\nu j}, \quad b'_\mu = \sum_{i=1}^m b_i \alpha_{\mu i}. \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

这里

因为 $a_{ij} = a_{ji}$, 所以可取 (28.2) 为适当的正交变换, 使得矩阵 $(a'_{\mu\nu})$ 成为对角线形式, 即

$$a'_{\mu\nu} = \lambda_\mu \delta_{\mu\nu},$$

这里 λ_μ 是矩阵 (a_{ij}) 的本征值。令 $\lambda_i^{\frac{1}{2}} = \kappa_i$, 由于 $\lambda_i = \varepsilon_i \kappa_i^2$, $\varepsilon_i = \pm 1$, 因而可再设 $x'_i = \kappa_i x''_i$ 而使 $\partial_{\mu\nu}^2 u$ 的系数成为

$$a''_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu \delta_{\mu\nu} \quad (\varepsilon_\mu = \pm 1 \text{ 或 } 0).$$

因此可以代替 (28.1), 考虑具有下列形状的文件

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \partial_i^2 u + \sum_{i=1}^m b_i \partial_i u + cu = f(x) \quad (\varepsilon_i = \pm 1 \text{ 或 } 0), \quad (28.4)$$

这里 ε_i 与 (a_{ij}) 的本征值 λ_i 具有相同的符号。

对一般的矩阵 (a_{ij}) , 即当

$$|a_{ij}|_{i,j=1,\dots,m} = \lambda_1 \cdots \lambda_m \neq 0 \quad (28.5)$$

时, $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i=1, \dots, m$), 这时, 如设

$$u = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i b_i x_i\right) v, \quad (28.6)$$

则容易证明, v 的标准型方程成为下面的形状 (不含一阶导数)

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \partial_i^2 v + c_1 v = f_1(x). \quad (28.7)$$

其次, 如果假设 (a_{ij}) 为蜕化矩阵, 即当方程为一般抛物型而

$$|a_{ij}|_{i,j=1,\dots,m} = \lambda_1 \cdots \lambda_m = 0 \quad (28.8)$$

时, 则必存在着等于 0 的 ε_i .

设

$$\varepsilon_i \neq 0 \quad (i=1, \dots, k), \quad \text{而 } \varepsilon_j = 0 \quad (j=k+1, \dots, m),$$

则由(28.2)能够得到变换后的方程

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \partial_i^2 v + \sum_{j=k+1}^m b_j \partial_j v + c_1 v = f_1(x).$$

如果 b_j 中有不等于 0 的函数, 设为 b_{k+1} , 那么只要令

$$x'_{k+1} = - \sum_{j=k+1}^m b_j x_j,$$

就能得到标准型方程

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \partial_i^2 v - \partial_{k+1}^2 v + c_1 v = f_1(x'). \quad (28.9)$$

设 b_j 中没有不等于 0 的函数 (即一切 $b_j \equiv 0$), 则标准型方程成为

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \partial_i^2 v + c_1 v = f_1(x). \quad (28.10)$$

此外, 如果 $L[u]$ 属于椭圆型, 即 $\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \xi_i \xi_j$ 为定号的, 这时, 由于 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 同号, 所以可以取 $\varepsilon_i = 1$ ($i=1, \dots, m$), 而标准型方程成为

$$\Delta u + cu = f(x), \quad (28.11)$$

$$\left(\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u \right).$$

其次, 如 $L[u]$ 属于广义双曲型, 即对于 (a_{ij}) , $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j$ 一般为变号的, 则本征值能为正数或负数, 但不能为 0. 这时, 令 $\varepsilon_i = 1$ ($i=1, \dots, k$), $\varepsilon_j = -1$ ($j=k+1, \dots, m$), 则标准型方程成为

$$\sum_{i=1}^k \partial_i^2 u - \sum_{j=k+1}^m \partial_j^2 u + cu = f(x). \quad (28.12)$$

特别是, 当本征值中仅有一个与其余的有相反的符号时, 那么, 把它所对应的独立变数取作 t , 而令其余的独立变数为 x , 则得标准型方程

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u + cu = f(t, x). \quad (28.13)$$

这种形式叫做**正规双曲型** (normally hyperbolic). 非正规的双曲型 (即本征值具有二个以上为正或为负的数) 叫做**超双曲型** (ultra-

hyperbolic)。

此外,在一般抛物型中,特别当 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是常号(即恒 ≥ 0 或恒 ≤ 0) 的时候,那末除去等于 0 的本征值以外其余的可算作是同号的。因此标准型方程成为

$$\Delta_{(k)}u - \partial_{k+1}u + cu = f(x) \quad (28.14)$$

或

$$\Delta_{(k)}u + cu = f(x) \quad \left(\Delta_{(k)} = \sum_{i=1}^k \partial_i^2 \right).$$

(28.14) 的情形叫做正规抛物型。

§ 29 作为常系数线性方程解的平面波

1. 迭加原理 现在简单地述说一下众所熟知的线性方程,特别是常系数线性方程的解法。

设 $L[u]$ 是对任意函数 u 的线性微分算子。 c_ν, u_ν 分别是任意常数与任意函数,则

$$L\left[\sum_{\nu=1}^n c_\nu u_\nu\right] = \sum_{\nu=1}^n c_\nu L[u_\nu].$$

因此,如果 $u = u_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) 是齐次线性方程

$$L[u] = 0 \quad (29.1)$$

的解,那么它们的线性组合 $u = \sum c_\nu u_\nu$ (系数为常数)也是(29.1)的解。此外如有无限个解 $u = u_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 并且级数

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \quad (c_n \text{ 常数}) \quad (29.2)$$

一致收敛,还适当高次(L 的阶数)逐项可微,那么就有

$$L[u] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L[u_n] = 0,$$

因而(29.2)也是(29.1)的解。

再者,如(29.1)的解 $u = u(x, \alpha)$ 含有参数 α , 而且连续依赖

于 α 的变化, 对于下列的定积分

$$u = \int \varphi(\alpha) u(x, \alpha) d\alpha \quad (29.3)$$

(积分区与 x 无关), 允许在积分符号下进行适当高次的 u 对 x 的微分, 则有

$$L[u] = \int \varphi(\alpha) L[u_\alpha] d\alpha = 0 \quad (u_\alpha = u(x, \alpha)),$$

从而 (29.3) 也是 (29.1) 的解。此外, 解对参数所作的导数, 即 $u = \partial_\alpha u(x, \alpha)$ 一般也是 (29.1) 的解。

因此从已知的解, 依照上面的步骤就能得到新的解, 这种方法叫做**迭加原理**。常常使用这种方法来求具体的偏微分方程满足各式各样条件的解, 所收到的效果是良好的 (参看本丛书: 偏微分方程的应用)。但是严密的說, 究竟在什么样的条件下, 才允许对级数作逐项微分, 或是在积分号下进行微分呢? 这样的问题是存在的。但在实际应用上, 常常可以不必考虑这些问题而直接用上面的方法求解, 得到了解以后, 再来讨论解应该符合那些条件就够了。

此外, 依照这样形式进行计算时可能遇到发散积分。这时有一种方法叫做取发散积分的有限部分法。如果要把这些各种各样形式的计算方法作理论上的统一, 那就要超出普通所用的函数概念的范围。这也正就是产生 Schwartz 广义函数理论的原因之一 (参看本丛书: 广义函数)。

2. 平面波的解 下面要特别考虑常系数线性方程的情形。先把常系数微分算子 L 中一切阶数为 κ 的项集中起来, 记以

$$P_\kappa(\partial_r) = \sum_{(v)} a_{v_1 \dots v_\kappa} \partial_{v_1}^{x_1} \dots \partial_{v_\kappa}^{x_\kappa} \quad (29.4)$$

于是对 k 阶的算子 L , 有写法

$$L[u] = \sum_{\kappa=0}^k P_\kappa(\partial_r) u. \quad (29.5)$$

$P_\kappa(\xi)$ 对于 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ 是 κ 次的齐次整式。此外, (29.5) 的主部是 $P_\kappa(\partial_x)u$, 对于方程

$$L[u] = 0, \quad (29.6)$$

超平面 ($m-1$ 维的线性流形)

$$\varphi(x) \equiv \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu x_\nu - c = 0 \quad (29.7)$$

是特征面的条件为

$$\sum_{(j)} a_{r_1, \dots, r_k} \partial_{r_1} \varphi \cdots \partial_{r_k} \varphi = P_\kappa(\alpha) = 0. \quad (29.8)$$

因此, 如果 (29.6) 的特征方程 $P_\kappa(\xi) = 0$ 存在实解的话, 那么就存在着实的特征平面 (29.7) (c 是任意的)。

为了方便起见, 引入写法 $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \alpha \cdot x$, 我们先求 (29.6) 具有形状如

$$u = \varphi(\alpha \cdot x) \quad (29.9)$$

的解。把 (29.9) 代入 (29.6) 后, 就得到

$$L[u] = \sum_{\kappa=0}^l P_\kappa(\partial_x) \varphi(\alpha \cdot x) = \sum_{\kappa=0}^k P_\kappa(\alpha) \varphi^{(\kappa)}(s)_{s=\alpha \cdot x} = 0. \quad (29.10)$$

首先考虑 $L[u]$ 仅具有主部的情形, 即

$$L[u] = P_\kappa(\partial_x)u = 0.$$

这时, 由于

$$P_\kappa(\alpha) \varphi^{(\kappa)}(s)_{s=\alpha \cdot x} = 0,$$

如果选定 α 为满足方程 (29.8) 的数, 那么可以认为 $\varphi(s)$ 是任意函数。具有形状如 (29.9) 的解叫做平面波。这时, 平面 $\alpha \cdot x = c$ 叫做波面, 函数 $\varphi(s)$ 叫做波形。于是就得到了下面的定理:

定理 29.1 如 $L[u]$ 仅具有主部, 且存在着实特征面, 那么就存在着平面波的解, 其波面为特征面, 而波形是任意的。

其次再考虑一下具有主部以外各项的 $L[u]$, 对于任意的满足 $P_\kappa(\alpha) \neq 0$ 的 α , 方程 (29.10) 对于未知函数 $\varphi(s)$ 成为 k 阶的常系

数线性常微分方程。这时, α 在满足 $P_k(\alpha) \neq 0$ 的限制下是任意的, 但 $\varphi(s)$ 却只是 k 个线性独立的函数的线性组合。至于这 k 个独立函数的求法, 具体的来说, 可设

$$u = e^{\alpha \cdot x}, \quad (29.11)$$

由于

$$L[u] = \sum_{\kappa=0}^k P_{\kappa}(\alpha) e^{\alpha \cdot x} = 0,$$

因此, 对于满足

$$\sum_{\kappa=0}^k P_{\kappa}(\alpha) = 0 \quad (29.12)$$

的任意的 α , (29.11) 就是 (29.6) 的解 (平面波)。

注意 满足 (29.12) 的 α 不限定是实数, 即使独立变数 x 是实数, (29.6) 的解也无妨是复数。要得到实的解, 只要把复数解分成实部与虚部即可。

例 考虑以 $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_m)$ 为独立变数的正规抛物型方程

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \quad (29.13)$$

(热传导方程), 以 $u = e^{\alpha t + \beta \cdot x}$ 为平面波, 则得

$$\alpha - \sum_{v=1}^m \beta_v^2 = 0,$$

因此得到了解 (平面波)

$$u = \exp \{ (\sum \beta_v^2) t + \beta \cdot x \}.$$

当 $\beta (\neq 0)$ 为实数时, 解当 $t \geq 0$ 时无界。为了要得到当 $t \geq 0$ 时有界的解, 可试令

$$u = e^{\alpha t + i\beta \cdot x} \quad (i^2 = -1).$$

这时 $\alpha = -\sum_{v=1}^m \beta_v^2$, 所以当 $t \geq 0$ 时有界的平面波是

$$u(t, x, \beta) = \exp \{ -(\sum \beta_v^2) t + i\beta \cdot x \}.$$

当 $t > 0$ 时, 由于 $u(t, x, \beta)$ 以及它的导数当 $|\beta| \rightarrow \infty$ 时急速的减少, 所以下列多重积分

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -(\sum \beta_v^2) t + i\sum \beta_v x_v \} d\beta_1 \cdots d\beta_m \quad (29.14)$$

收敛, 并且 u 对 t 及 x 任意次数的微分运算, 都允许在积分号下施行。于是 (29.14) 也是 (29.13) 的解。为了计算积分, 可设 $\sqrt{t} \beta_v = \xi_v$, $x_v / \sqrt{t} = \gamma_v$,

这样,就得到了

$$u = \frac{1}{\sqrt{t^m}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sum \xi_v^2 + i \sum \gamma_v \xi_v) d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

再利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2 + i\gamma\xi) d\xi = \sqrt{\pi} e^{-\gamma^2/4}$$

就能得到

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{t}}^m \exp\left(-\frac{\sum r_v^2}{4t}\right).$$

§ 30 拟綫性方程的特征条件

1. 二阶的面素組 直到現在为止, 为了容易理解, 我們只討論了綫性方程, 現在來說明一下拟綫性方程的特征条件。为了使后面的理論更加明确, 先解釋一下二阶的面素組。

首先对任意函数 $u = u(x)$, 設

$$\partial_i u = p_i, \quad \partial_{ij}^2 u = r_{ij}, \quad (30.1)$$

則以 x 作为独立变数的全微分方程

$$du = \sum_{i=1}^m p_i dx_i, \quad dp_i = \sum_{j=1}^m r_{ij} dx_j \quad (30.2)$$

成立。如設独立变数 x 是参数 $s = (s_1, \cdots, s_k)$ ($k \leq m$) 的函数 $x_i = X_i(s)$ ($i = 1, \cdots, m$), 那么把 (x, u, p, r) 都考虑成 s 的函数时, 它們之間将成立关系式(30.2)。

一般, 这 $m+1+m+m^2$ 个量 $(x, u, p, r) = (x_1, \cdots, x_m, u, p_1, \cdots, p_m, r_{11}, \cdots, r_{mm})$ ($r_{ij} = r_{ji}$) 所成的組称为二阶的面素。如果把它們看作 k 个参数 s 的函数, 而(30.2)成立, 那么就叫它們为 (k 維的) 二阶面素組或簡称为二阶帶。方程(30.2)叫做二阶成带条件。

对于二阶面素組, 如用

$$s_\alpha = s_\alpha(t_1, \cdots, t_l) \quad (\alpha = 1, \cdots, k) \quad (l \leq k)$$

来代替 s 而以 t 为参数, 則它仍成为二阶面素組。特別对 m 維的

二阶面素組,如

$$\frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(s_1, \dots, s_m)} \neq 0,$$

則可以 x 代替 s 作为独立变数,于是由 (30.2) 就能导出 (30.1)。

此外,对面素 (x^0, u^0, p^0, r^0) , 如有

$$p_i^0 = \partial_{x_i} u(x^0), \quad r_i^0 = \partial_{x_i}^2 u(x^0),$$

那么就說, 曲面 $u = u(x)$ 含有二阶面素 (x^0, u^0, p^0, r^0) 。

为了与二阶面素对照, 我們把 §9 中所說的面素 (x, u, p) 特別叫做一阶面素。对于一阶的面素組 $(x, u, p) = \{x, u, p\}(s)$, 滿足下列条件的二阶面素 (x^0, u^0, p^0, r^0)

$$(x^0, u^0, p^0) = \{x, u, p\}(s^0), \quad dp_i = \sum_{j=1}^m r_{ij}^0 dx_j, \quad (s = s^0)$$

(即在 $s = s^0$ 处成立二阶成帶条件) 叫做迭在一阶面素組上的二阶面素。

下面研究一下, 当空間的变数由 x 变成 x' 时, 求使二阶成帶条件保持的二阶面素的变換式。这里应该加上条件

$$D(x'_1, \dots, x'_m) : D(x_1, \dots, x_m) \neq 0,$$

設 $u = u'$, 由

$$du = \sum_{\mu=1}^m p'_\mu dx'_\mu, \quad dp'_\mu = \sum_{\nu=1}^m r'_{\mu\nu} dx'_\nu$$

以及

$$dx'_\mu = \sum_{i=1}^m \partial_i x'_\mu dx_i, \quad d(\partial_i x'_\mu) = \sum_{j=1}^m \partial_{ij}^2 x'_\mu dx_j,$$

(30.3)

再从

$$du = \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^m p'_\mu \partial_i x'_\mu dx_i = \sum_{i=1}^m p_i dx_i,$$

得到

$$p_i = \sum_{\mu=1}^m p'_\mu \partial_i x'_\mu,$$

此外因为

$$dp_i = \sum_{\mu=1}^m \partial_i x'_\mu dp'_\mu + \sum_{\mu=1}^m p'_\mu d(\partial_i x'_\mu) = \sum_{j=1}^m r_{ij} dx_j$$

及(30.3), 所以成立

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \sum_{\mu=1}^m p'_\mu \partial_i x'_\mu, \\ r_{ij} &= \sum_{\mu, \nu=1}^{m, m} r'_{\mu\nu} \partial_i x'_\mu \partial_j x'_\nu + \sum_{\mu=1}^m p'_\mu \partial_{ij}^2 x'_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

如在(30.4)中解出 p' , r' , 则由于

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m \partial_i x'_\mu \partial'_\mu x_j &= \delta_{ij}, \\ \sum_{\mu=1}^m \partial_{ij}^2 x'_\mu \partial'_\mu x_j + \sum_{\mu, \nu=1}^{m, m} \partial_i x'_\mu \partial_k x'_\nu \partial_{\mu\nu}^2 x_j &= 0, \end{aligned}$$

所以同样地能得到与(30.4)形状相同的逆变换

$$\left. \begin{aligned} p'_\mu &= \sum_{i=1}^m p_i \partial'_\mu x_i, \\ r'_{\mu\nu} &= \sum_{i, j=1}^{m, m} r_{ij} \partial'_\mu x_i \partial'_\nu x_j + \sum_{i=1}^m p_i \partial_{\mu\nu}^2 x_i. \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

2. 拟线性方程的特征条件 现在把二阶拟线性微分方程 (x 独立变数) 考虑为二阶面素组 $\{x, u, p, r\}$ (x) 所满足的方程

$$\sum_{i, j=1}^{m, m} a_{ij}(x, u, p) r_{ij} + f(x, u, p) = 0. \quad (30.6)$$

设在 x 空间中给定一个用参数 s 表示的曲面 S ($m-1$ 维流形):

$$x_i = X_i(s), \quad s = (s_1, \dots, s_{m-1}),$$

又在 S 上给定一阶面素组作为初始组

$$(x, u, p) = \{X, U, P\}(s). \quad (30.7)$$

现在求迭在这初始组上并满足(30.6)的二阶面素组 (x, u, p, r) .

把空间的变数由 x 变成 x' , 由(30.4), (30.6)就成为

$$\sum_{\mu, \nu=1}^{m, m} a'_{\mu\nu}(x', u, p') r'_{\mu\nu} + f'(x', u, p') = 0, \quad (30.8)$$

这里

$$a'_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i x'_\mu \partial_j x'_\nu = Q(x'_\mu, x'_\nu),$$

$$f' = f + \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \sum_{\mu=1}^m \partial_i^2 x'_\mu p'_\mu.$$

設 $\psi_i(x')$ 是 x' 的这样的函数, 它满足

$$\psi_i(x'_1, \dots, x'_{m-1}, 0) = X_i(x'_1, \dots, x'_{m-1}) \quad (i=1, \dots, m),$$

并且

$$\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_m)}{D(x'_1, \dots, x'_m)} \neq 0,$$

則 $x = \psi(x')$ (或其逆函数 $x'_\nu = \varphi_\nu(x)$) 就定义了 x 与 x' 之間的变换, 变换后, S 就可用下列方程来表示

$$x'_1 = s_1, \dots, x'_{m-1} = s_{m-1}, x'_m = 0.$$

从而根据二阶成帶条件, 能够得到

$$\left. \begin{aligned} r'_{\mu\nu} &= \partial_{\mu\nu}^2 u(s), \\ r'_{m\mu} &= \partial_\mu p'_m(s). \end{aligned} \right\} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, m-1) \quad (30.9)$$

这样除了 r'_{mm} 以外就可以唯一地确定出一切的 $r'_{\mu\nu}$. 但如果沿着 (30.7)

$$a'_{mm} = Q(x'_m, x'_m)_{(x,u,p)(s)} \neq 0, \quad (30.10)$$

那么由 (30.8) 也就可以唯一确定 r'_{mm} .

如果沿着 (30.7)

$$a'_{mm} = Q(x'_m, x'_m)_{(x,u,p)(s)} = 0, \quad (30.11)$$

那么根据 (30.8) 与 (30.9), 存在着满足方程 (30.6) 并且迭在 (30.7) 上的二阶面素組的充要条件是, 对于初始面素組成立着下面的方程

$$2 \sum_{\mu=1}^{m-1} a'_{m\mu} \partial_\mu p'_m(s) + \sum_{\mu,\nu=1}^{m-1,m-1} a'_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 u(s) + f' = 0, \quad (30.12)$$

这时, 由于 r'_{mm} 是不定的, 所以对 S 的每个点, 实际存在着 ∞^1 个所求的二阶面素。

当 S 表示为 $(x'_m =) \varphi(x) = 0$ 时, 如果对 S 上的初始面素组 (30.7),

$$Q(\varphi, \varphi)_{(x, u, p)(s)} \neq 0,$$

那么就称 (30.7) 为非特征的。相反, 如

$$Q(\varphi, \varphi)_{(x, u, p)(s)} = 0,$$

那么就叫做准特征的。如 (30.7) 为准特征, 且 (30.12) 成立, 那末这样的 (30.7) 叫做一阶特征带。根据它的定义, 成立下面定理。

定理 30.1 如 S 上的初始面素组 (30.7) 为非特征, 那么存在着唯一的满足 (30.6) 并迭在 (30.7) 上的二阶面素组。如 (30.7) 为准特征, 所求的二阶面素组存在的充要条件是 (30.7) 为一阶特征带。这时存在着无穷多的二阶面素满足所求的条件。

第6章 橢圓型偏微分方程

本章主要講解二階綫性橢圓型偏微分方程。由其主部系數所得的二次型是正定的，即 $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j > 0$ ($\xi \neq 0$)。一般以 $x = (x_1, \dots, x_m)$ 為獨立變數。前章的許多記號在此仍照樣使用。

§ 31 邊值問題

1. Dirichlet 問題及 Neumann 問題 正象 § 20 中所說的，對典型的橢圓型方程即 Laplace 方程來說，始值問題是不適切的，而邊值問題是適切的。故對橢圓型方程來說，邊值問題比始值問題更為重要。事實上，在物理學等的自然要求下所產生的橢圓型方程的問題，常是邊值問題而不是始值問題。

現在考慮二階自伴橢圓型方程

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^m \partial_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x) \partial_j u \right) - c(x)u = f(x). \quad (31.1)$$

設 B 為 m 維的有界開區域，它的邊界 Γ 是光滑曲面。以後如不特別申明，總設 $u(x)$ 為 B 內二次連續可微的函數，而在 $B \cup \Gamma$ 上它是一次連續可微的。

如果在 Γ 上已給定函數 $g(x)$ ，試求在 B 內滿足 (31.1)，而在 Γ 上等於 $g(x)$ 的解 u （即在 Γ 上 $u = g(x)$ ），這樣的問題叫做 **Dirichlet 問題**。另外求在 B 內滿足 (31.1)，而在 Γ 上成立 $\partial_N u = g_1(x)$ （ $\partial_N u$ 是 u 的余法綫導數）的解的問題，叫做 **Neumann 問題**。再如求這樣的解 u ，它在 Γ 的一部分上滿足 $u = g(x)$ ，但是在另一部分上滿足 $\partial_N u = g_1(x)$ ，這種問題叫做混合問題。

現在特別考慮

$$c(x) \geq 0 \quad (31.2)$$

的情形。对这种情形，我們先来証明 Dirichlet 問題及 Neumann 問題解的唯一性。如果对同一边值問題存在着两个解的話，令它們的差为 v ，則

$$\left. \begin{array}{ll} \text{当 } x \in B \text{ 时,} & L[v] = 0, \\ \text{当 } x \in \Gamma \text{ 时,} & v = 0 \text{ 或是 } \partial_N v = 0. \end{array} \right\} \quad (31.3)$$

根据公式(26.11) (只要把 c 換成 $-c$)，就有

$$\int_B \{Q(v, v) + cv^2\} d^m x + \int_B v L[v] d^m x = \int_\Gamma v \partial_N v dS.$$

于是由(31.3)有

$$\int_B \{Q(v, v) + cv^2\} d^m x = 0. \quad (31.4)$$

由于 $Q(v, v) \geq 0$, $cv^2 \geq 0$ ，所以

$$Q(v, v) = 0, \quad cv^2 = 0.$$

由第一式，就知道 $\partial_N v = 0$ ，即 $v = \text{常数}$ ，因此对 Dirichlet 問題，必有 $v \equiv 0$ 。此外对 Neumann 問題，如在 B 內存在一点 x^0 使得 $c(x^0) > 0$ ，那么一定也有 $v \equiv 0$ ；如果 $c(x) \equiv 0$ ，則 $v = \text{常数}$ ，并且这个常数是完全任意的。对混合問題自然也有 $v \equiv 0$ 。总的來說，除了当 $c(x) \equiv 0$ 时，Neumann 問題的两个解的差是任意常数外，对于其他的情形，上述的边值問題都存在着唯一的解。

注意 1 对于 Dirichlet 問題，即使 $L[u]$ 不是自伴的，或者不成立 $c \geq 0$ ，則只要对区域 B 的大小与 $L[u]$ 的系数的大小之間規定某种适当关系(不等式)，仍能用上面的方法証明解的唯一性。証明从略。

如 $L[u]$ 是自伴的，由 Green 公式，对于任意的 u, v 成立着

$$\int_B \{v L[u] - u L[v]\} d^m x = \int_\Gamma \{v \partial_N u - u \partial_N v\} dS.$$

特別当 $c \equiv 0$ 时，可設 $v = 1$ ，由于 $L[v] = 0$ ，及 $\partial_N v = 0$ ，所以对(31.1)的解成立

$$\int_\Gamma \partial_N u dS = \int_B f(x) d^m x. \quad (31.5)$$

因此当 $c \equiv 0$ 时, Neumann 問題解存在的必要条件为, 在 F 上給定的 $\partial_N u = g_1(x)$ 應該滿足(31.5)。

2. Dirichlet 原理 对于任意的函数 u, v , 令

$$\int_B \{Q(u, v) + cuv\} d^n x = D[u, v]. \quad (31.6)$$

特別当 $u=v$ 时, 就称积分 $D(u, u)$ 为 **Dirichlet 积分**。如果在 B 内有 $c(x) \geq 0$ 的話, 立刻就知道

$$D[u, u] \geq 0. \quad (31.7)$$

所以如果 $D[u, u] = 0$, 則在 $c \equiv 0$ 的情形, 必有 $u = \text{常数}$; 如在 B 内有使 $c(x^0) > 0$ 的点 x^0 , 則 $u \equiv 0$ 。

現在設 $u = u_0(x)$ 是方程 (31.1) 的 Dirichlet 問題的解, 我們来研究关于和 $u_0(x)$ 有相同边界条件的函数 u 的积分

$$J[u] = D[u, u] + 2 \int_B u \cdot f d^n x. \quad (31.8)$$

在这些 u 中, 当 $u = u_0(x)$ 时积分具有极小值。事实上, 如在 B 内 $u \neq u_0$ 的話, 由于 $D[u - u_0, u - u_0] > 0$ (在 F 上 $u - u_0 = 0$), 所以有

$$\begin{aligned} D[u, u] - D[u_0, u_0] &= D[u - u_0, u - u_0] + 2D[u - u_0, u_0] \\ &> 2D[u - u_0, u_0], \end{aligned}$$

这样就得到

$$\begin{aligned} J[u] - J[u_0] &= D[u, u] - D[u_0, u_0] + 2 \int_B (u - u_0) f d^n x \\ &> 2 \{ D[u - u_0, u_0] + \int_B (u - u_0) f d^n x \}. \end{aligned} \quad (31.9)$$

再由公式(31.6)及(26.11)有

$$\begin{aligned} D[u - u_0, u_0] &= - \int_B (u - u_0) L[u_0] d^n x + \int_F (u - u_0) \partial_N u_0 dS \\ &= - \int_B (u - u_0) f d^n x. \end{aligned}$$

所以根据(31.9), 就得到了

$$J[u] > J[u_0].$$

相反, 如果 $u = u_0$ 是在 I' 上等于已給值, 并且使 $J[u]$ 取极小 (u 在 B 内二次, 在 $B \cup I'$ 上一次連續可微) 的函数, 則 $u = u_0$ 是方程(31.1)的解。事实上, 令 $u - u_0 = w$, 由于

$$J[u] - J[u_0] = D[w, w] + 2D[w, u_0] + 2 \int_B w f d^n x,$$

所以对于 B 的任意試驗函数 w , 必有

$$D[w, w] + 2D[w, u_0] + 2 \int_B w f d^n x \geq 0. \quad (31.10)$$

取 λw 代替 w (λ 是常数), 則有

$$\lambda^2 D[w, w] + 2\lambda \{D[w, u_0] + \int_B w f d^n x\} \geq 0.$$

当 λ 无限小时, 因为第一項是二級的无穷小, 所以一定成立如下的关系式

$$D[w, u_0] + \int_B w f d^n x = 0. \quad (31.11)$$

現在由于

$$D[w, u_0] = \int_B \{Q(w, u_0) + c w u_0\} d^n x = - \int_B w L[u_0] d^n x,$$

所以根据(31.11), 对任意的試驗函数 w , 必然成立

$$\int_B w \{L[u_0] - f\} d^n x = 0.$$

于是再根据变分学基本引理, 就有

$$L[u_0] - f = 0.$$

根据上面所作的討論, Riemann 曾对 $L \equiv \Delta$ 情形的 Dirichlet 問題作过这样的断言: 因为 Dirichlet 問題的解就是保留边界条件并且使得 $J[u]$ 成为极小的函数 u , 所以可以保証这种函数必定存在。这个断言叫做 Dirichlet 原理。但是現在还有下面两个

問題：

在已給定的边界条件下，

(i) 对 $J[u]$ 是否存在使它取极小值的函数？

(ii) 使 $J[u]$ 为极小值的函数是否二次連續可微？（因为 $J[u]$ 中只含有 u 的一阶导数而不含有 u 的二阶导数。）

对于 Riemann 由直观所得到的断言，Weierstrass 从理論的观点曾加以批判，并举出了变分学中不存在极小值的例題，以非难 Riemann 的論点。这样就使得从直观方面看来是正确的 Riemann 方法，从数学方面来看，不能符合严密的要求。后来 Hilbert 重新研究了这种方法，并且成功地为其建立了严密的理論基础。这方法以后还经过 Weyl, Courant 等人的研究。近来，Friedrichs 等曾指出，对于一般高阶的橢圓型方程，如把函数族表示在 Hilbert 空間内，对于方程的广义解，(i) 几乎是不証自明的事情；此外，由于对广义解的正則性建立了一般的証明方法，从而能証明(ii)也成立。

注意 2 如存在着使 $J[u]$ 取极小值的 u_0 (u_0 一次連續可微)，那么容易理解， u_0 必是 (31.1) 的广义解。事实上，对于 u_0 及任意的試驗函数 w ，公式 (31.11) 必成立。于是根据公式 (26.11) 有

$$D[w, u_0] = - \int_B u_0 L[w] d^m x,$$

由于 $L \equiv L^*$ ，所以

$$\int_B u_0 L^*[w] d^m x = \int_B w f d^m x.$$

即 u_0 是方程 (31.1) 的广义解 (弱解)。

如 $L[u]$ 不是自伴的，那么就不成立 Dirichlet 原理。但是最近有了关于 Hilbert 空間泛函表現定理 (Riesz 定理) 的变形定理，即 Lax-Milgram 定理，以它为基础可以証明一般橢圓型方程广义解的存在定理。Riesz 表現定理与 Dirichlet 原理是同类型的，它基于 Hilbert 空間“正射影存在”的事实。但是由于它脱离了极值存在的形式，而用泛函表現的形式出現，所以成了解决問題的真正有力工具 (参看本丛书：泛函分析)。对于这种近代理論，H. Weyl 及小平邦彥是这方面工作的先驅者。

3. Dirichlet 問題解的唯一性 如 $L[u]$ 不是自伴的, 并且 c 不一定 ≥ 0 , 則恰好使 Dirichlet 問題唯一性成立的充分条件, 可以从一种微分不等式得到。根据这种方法, 只要假定解在 B 内二次連續可微, 并在 $B \cup I'$ 上連續, 就能保証解的唯一性。此外对 B 的边界 I 也不需要假設它的光滑性。設

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{j=1}^m b_j \partial_j u + c(x)u, \quad (31.12)$$

則成立下面的定理。

定理 31.1 如存在着这样的函数 $\omega(x)$, 它在 $B \cup I'$ 上連續, 在 B 内二次連續可微, 并且还滿足下列条件

$$\text{在 } B \cup I' \text{ 上, } \omega(x) > 0; \quad \text{在 } B \text{ 内, } L[\omega] < 0. \quad (31.13)$$

那么对于 B 的 Dirichlet 問題的解就只可能有一个。

証 現在只要証明对于 (31.12) 的解 u , 如果在 I 上 $u=0$, 那么必是 $u \equiv 0$ 即可。我們首先証明在 B 中, 必然成立

$$u(x) \leq 0. \quad (31.14)$$

設 λ (常数) 是相当大的正数, 显然就有

$$\lambda \omega(x) > u(x) \quad (x \in B \cup I'). \quad (31.15)$$

如果 (31.14) 不成立; 那么对一切滿足 (31.15) 的 λ 一定存在着下限 λ_0 , 并且 $\lambda_0 > 0$. 令

$$w(x) = \lambda_0 \omega(x) - u(x),$$

則在 B 內存在着这样的点 x^0 , 使得

$$w(x) \geq 0 \quad (x \in B), \quad w(x^0) = 0 \quad (31.16)$$

(在 I 上 $w > 0$). 于是 w 在 $x=x^0$ 处有极小值, 所以必有

$$\partial_i w(x^0) = 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (31.17)$$

又由 (31.12) 及 (31.13) 有

$$L[w] = \lambda_0 L[\omega] - L[u] < 0.$$

由这个式子及 (31.16), (31.17), 就得到

$$L[w](x^0) = \left(\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \partial_{ij}^2 w \right)(x^0) \leq 0. \quad (31.18)$$

现在利用线性变换

$$x'_\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_{\mu i} x_i \quad (31.19)$$

把独立变数 x 变成 x' , 得到

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \partial_{ij}^2 w = \sum_{\mu,\nu=1}^{m,n} a'_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 w,$$

其中

$$a'_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \alpha_{\mu i} \alpha_{\nu j}.$$

因而适当地选择变换 (31.19) 后, 就可以使

$$a'_{\mu\nu}(x^0) = \delta_{\mu\nu}.$$

因为 w 在 $x=x^0$ 处为极小, 所以应有

$$\left(\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \partial_{ij}^2 w \right)(x^0) = \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{m,n} \partial_{\mu\nu}^2 w \right)(x^0) \geq 0,$$

这个结果与 (31.18) 矛盾, 所以 (31.14) 非成立不可。

此外, 如果考虑以 $-u$ 代替 u , 还能够证明 $u \geq 0$, 所以必有 $u \equiv 0$. 证毕

如 $c(x) > 0$, 可取 $\omega(x) \equiv 1$, 则

$$L[\omega] < 0.$$

于是根据定理 31.1, 就知道 Dirichlet 问题的解必是唯一的。如 $c \geq 0$, 由于 $a_{ii} = 0$, 所以存在着满足下列条件的常数 α 及 β ,

$$a_{ii} \geq \alpha > 0, \quad b_i \leq \beta.$$

设 x^0 是 B 内的任一点, 令

$$\omega(x) = 1 - \varepsilon e^{-\kappa(x-x^0)} \quad (\varepsilon > 0, \kappa > 0).$$

当 ε 相当小时, 因为在 $B \cup \Gamma$ 上 $\omega(x) > 0$, 所以

$$\begin{aligned} L[\omega] &= -\varepsilon(a_{11}\kappa^2 - b_1\kappa)e^{-\kappa(x_1-x_1^0)} - c\omega \\ &\leq -\varepsilon(\alpha\kappa^2 - \beta\kappa)e^{-\kappa(x_1-x_1^0)}. \end{aligned}$$

因此,如果确定 κ , 使得 $\alpha\kappa > \beta$ (与 ε 无关), 则有 $L[\omega] < 0$. 于是问题的解也必是唯一的。

此外,即使 $c(x)$ 的符号可变,但

$$\begin{aligned} \text{diam}(B) = d, \quad \sum_{i=1}^m a_i &\geq \alpha > 0, \\ \sqrt{\sum b_i^2} &\leq \beta, \quad \text{Max}\{c(x), 0\} \leq \gamma, \end{aligned} \quad (31.20)$$

则可取

$$\omega(x) = d^2 - \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2.$$

由于在 $B \cup \Gamma$ 上 $\omega(x) \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} L[\omega] &= -2 \sum_{i=1}^m a_i - 2 \sum_{i=1}^m b_i (x_i - x_i^0) - c\omega \\ &< -2\alpha + 2\beta d + \gamma d^2. \end{aligned}$$

如果适当地选择 d , 譬如令 d 相当小, 使得

$$2\beta d + \gamma d^2 \leq 2\alpha, \quad (31.21)$$

则 $L[\omega] < 0$, 从而根据定理 31.1 就知道这样的 Dirichlet 问题也只能有唯一的解。

定理 31.2 如 $c(x) \geq 0$, 则 Dirichlet 问题的解是唯一的。此外如果区域 B 相当的小[即由 (31.20) 所给定的数 α, β, γ, d , 满足条件 (31.21) 时], Dirichlet 问题的解仍然是唯一的。

注意 3 条件 (31.21) 在一定意义下可以认为是最好的了, 即如果条件不成立的话, 那么 Dirichlet 问题的解就不一定是唯一的, 譬如

$$u = a \sin x \sin y \quad (a \text{ 任意常数})$$

为方程

$$u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0$$

的解。如取 B 为区域 $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$, 则在 B 的边界 Γ 上满足 $u = 0$ 的解就不是唯一的。

在 § 17 中所说的 Haar 不等式以及定理 31.1 中所说的微分不等式, 对于某些情形, 的确是解决问题的有效工具。但是, 作为现代偏微分方程理论基

礎的, 还是那些由 Dirichlet 积分的启发而得到的各种关于积分的不等式。

§ 32 Laplace 方程和 Poisson 方程

1. Laplace 方程的基本解 本节略为介绍一些关于最简单的橢圓型偏微分方程, 即 Laplace 方程与 Poisson 方程的性质。我們先来研究 Laplace 方程

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u = 0. \quad (32.1)$$

这个方程的解一般叫做調和函数也叫勢函数。現在如果在 Green 积分公式中取 $L (= L^*) = \Delta$, $v = 1$, 則由于 $\Delta u = \Delta v = 0$, 而余法綫与曲面法綫完全一致, 所以对于在 $B \cup \Gamma$ (Γ 为区域 B 的边界) 上一次連續可微, 而在 B 內調和的函数一定成立

$$\int_{\Gamma} \partial_n u dS = 0 \quad (\partial_n u \text{ 是 } u \text{ 的法綫导数}). \quad (32.2)$$

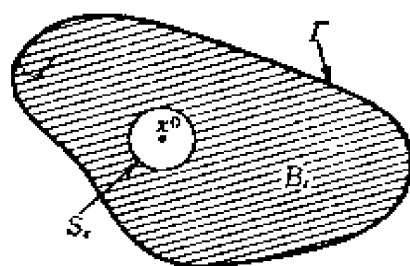


图 32.1

現在我們再考虑調和函数 u 以 B 內一点 x^0 为奇异点的情形。以 x^0 为中心, 相当小的 ε 为半径, 作一个球面 S_ε , 并把 B 內除去 S_ε 的内部所成的区域叫做 B_ε (見图 32.1), 那么, (32.2) 对于 B_ε 也适用。 B_ε 的边界为

Γ 与 S_ε , 由于 S_ε 的内部現在算为 B_ε 的外部, 所以有

$$\int_{\Gamma} \partial_n u dS = \int_{S_\varepsilon} \partial_n u dS. \quad (32.3)$$

这个积分值与 ε 无关(只要 S_ε 落在 B 內即可)。

設由 B 內定点 x^0 到任一点 x 的距离为

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}, \quad (32.4)$$

現在求形式如 $u = \phi(r)$ 的調和函数。注意关系式 $\partial_i r = (x_i - x_i^0)/r$,

对 u 二次微分后,就有

$$\Delta u = \phi'' + \frac{m-1}{r} \phi' = 0.$$

这个方程可以看作 $\phi(r)$ 的常微分方程,从而得到

$$\phi = \begin{cases} c \log r + c' & (m=2 \text{ 时}), \\ cr^{2-m} + c' & (m \geq 3 \text{ 时}). \end{cases}$$

至于积分常数 c' , 可以根据条件

$$\int_{S_s} \partial_n u dS = -1 \quad (32.5)$$

来决定。因为对于球面 S_s 有 $\partial_n u = \phi'(r)$, 所以

$$c = \begin{cases} -1/2\pi & (m=2 \text{ 时}), \\ 1/(m-2)\omega_m & (m \geq 3 \text{ 时}), \end{cases}$$

这里 ω_m 表示 m 维单位球的面积, 即 $\omega_m = 2\pi^{m/2} \Gamma(m/2)$. 对于这样的 $\phi(r)$, 再加上任意一个在整个 B 域正则的调和函数 $w(x, x^0)$ (x^0 作为参数) 后, 就得到

$$u = \Phi(x, x^0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} + w(x, x^0) & (m=2), \\ \frac{1}{(m-2)\omega_m} r^{2-m} + w(x, x^0) & (m \geq 3). \end{cases} \quad (32.6)$$

它叫做 Laplace 方程以 x^0 为奇异点的基本解, 也叫做初等解, 它是方程 (32.1) 的解, 并且对于奇异点 x^0 满足条件 (32.5)。

2. Poisson 方程 (32.1) 右边为已知函数 $f(x)$ 的方程

$$\Delta u = f(x) \quad (32.7)$$

叫做 Poisson 方程。利用 Laplace 方程的基本解能得到这种方程的解。为此, 对区域 B_s 应用 Green 公式 (显然是适用的)。由于 $L(=L^*) = \Delta$, 所以对任意函数 u 及基本解 $\Phi(x, x^0)$,

$$\int_{B_s} \Phi \cdot \Delta u d^n x = \left(\int_{\Gamma} - \int_{S_s} \right) \{ \Phi \partial_n u - u \partial_n \Phi \} dS. \quad (32.8)$$

首先我们来证明, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\int_{S_\varepsilon} \Phi \partial_n u dS \rightarrow 0, \quad \int_{S_\varepsilon} u \partial_n \Phi dS \rightarrow -u(x^0). \quad (32.9)$$

先选定这样的常数 μ, κ , 使得在 $x = x^0$ 的邻域内, $|\partial_n u| \leq \mu$, $|\Phi| \leq \kappa r^{2-n}$. 由于在 S_ε 上有 $dS = \varepsilon^{-1} d\omega$ ($d\omega$ 单位球面面素), 所以

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \Phi \partial_n u dS \right| \leq \omega_n \mu \kappa \varepsilon.$$

于是(32.9)中的第一式成立。再因为当 $u = \Phi$ 时, (32.5)成立, 所以

$$\int_{S_\varepsilon} u \partial_n \Phi dS = -u(x^0) + \int_{S_\varepsilon} \{u - u(x^0)\} \partial_n \Phi dS.$$

现在选定常数 μ, κ , 使得在 $x = x^0$ 的邻域内成立着 $|u - u(x^0)| \leq \mu r$, $|\partial_n \Phi| \leq \kappa r^{1-n}$, 这样就有

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \{u - u(x^0)\} \partial_n \Phi dS \right| \leq \omega_n \kappa \mu \varepsilon,$$

于是(32.9)中的第二式也成立,

最后, 在(32.8)式, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 取其极限, 就得到公式

$$u(x^0) = - \int_B \Phi \Delta u d^n x + \int_\Gamma \{\Phi \partial_n u - u \partial_n \Phi\} dS. \quad (32.10)$$

对于 Laplace 方程的基本解 $\Phi(x, x^0)$, 如果当 x 在 Γ 上时, 它满足 $\Phi(x, x^0) = 0$, 那就特别称它为区域 B 的 **Green 函数**, 并记作 $\Phi(x, x^0) = G(x, x^0)$. 相反, 如果 $G(x, x^0)$ 是关于区域 B 的 Green 函数, 那么对(32.7)的任一解 u , 根据(32.10)可以写成

$$u(x^0) = - \int_B G(x, x^0) f(x) d^n x - \int_\Gamma \partial_n G(x, x^0) u(x) dS. \quad (32.11)$$

因此, 知道了 Green 函数后, 如果 Poisson 方程的 Dirichlet

問題的解存在的話, 那么这个解在 x^0 处的值就可以根据公式 (32.11) 来求。但是这样还留下一个问题, 即对于任意的 $f(x)$, 以及任意給定的 u 在 I' 上的值, (32.11) 是否是 Dirichlet 問題的解呢?

下面我們証明, 如果基本解中的 $w(x, x^0) \equiv 0$, 即当

$$\Phi(x, x^0) = \phi(x - x^0) \quad (32.12)$$

时, 对任意給定的函数 $f(x)$,

$$u(x) = - \int_R \phi(x' - x) f(x') d^n x' \quad (32.13)$$

确是 (32.7) 的一个解。

設 x^0 是 B 内任意一点。适当地选择 $\delta > 0$, 就可以使得范围 $|x - x^0| \leq 2\delta$ 完全落在 B 的内部。再設 $\rho(x)$ 是这样二次連續可微的函数, 当 $|x - x^0| \leq \delta$ 时 $\rho(x) = 1$, 当 $|x - x^0| \geq 2\delta$ 时, $\rho(x) = 0$. 令

$$\rho(x)f(x) = f_0(x), \quad f(x) - f_0(x) = f_1(x),$$

則当

$$\begin{aligned} |x - x^0| \geq 2\delta \text{ 时, } & f_0(x) = 0; \\ |x - x^0| \leq \delta \text{ 时, } & f_1(x) = 0, \end{aligned}$$

并且

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x). \quad (32.14)$$

現在令

$$u_\alpha(x) = - \int_B \phi(x' - x) f_\alpha(x') d^n x' \quad (\alpha = 0, 1), \quad (32.15)$$

由于当 $x \neq x'$ 时, $\phi(x' - x)$ 是調和函数, 所以

$$u_1(x) = - \int_{B, |x' - x^0| > \delta} \phi(x' - x) f_1(x') d^n x'$$

在 $|x - x^0| < \delta$ 內, 必定满足方程

$$\Delta u_1(x) = 0. \quad (32.16)$$

再由于当 $|x - x^0| \geq 2\delta$ 时, $f_0(x) = 0$, 所以可假设在 B 的外部仍有 $f_0(x) = 0$, 而把积分区域考虑为整个的空间。这时我们可省略积分区域的记号, 而有

$$u_0(x) = - \int \phi(x' - x) f_0(x') d^n x' = - \int \phi(x') f_0(x + x') d^n x'.$$

于是, 如果 $f(x)$ 二次连续可微, 则有

$$\begin{aligned} \Delta u_0(x) &= - \int \phi(x') \Delta f_0(x + x') d^n x' \\ &= - \int \phi(x' - x) \Delta f_0(x') d^n x'. \end{aligned} \quad (32.17)$$

如在公式 (32.10) 中取 $u = f_0(x)$, 则因为 $\Phi = \phi$, 而在 F 上有 $f_0 = \partial_n f_0 = 0$, 所以有

$$f_0(x) = - \int \phi(x' - x) \Delta f_0(x') d^n x'.$$

因此由 (32.17) 得到

$$\Delta u_0 = f_0(x).$$

从这个公式, 以及 (32.14), (32.15), (32.16), 就可以证明当 $|x - x^0| < \delta$ 时, 成立

$$\Delta u = f(x).$$

因为 x^0 是 B 内任意一点, 所以 (32.13) 是 (32.7) 的解。

注意 1 在 (32.10) 及 (32.11) 中假设了 Φ 以及 G 对于变数 x , 在区域 $B \cup F$ 上连续可微。又在上面证明 (32.13) 满足方程 (32.7) 的过程中, 曾假设 $f(x)$ 二次连续可微。但事实上, 只要假设 $f(x)$ 一次连续可微, 或者满足较弱的 Hölder 条件

$$|f(x') - f(x)| \leq \kappa |x' - x|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (32.18)$$

就够了。设 $m \geq 3$ (当 $m = 2$ 时证法一样), 为了证明这个论断, 代替 $\phi(r)$ ($r = |x - x'|$) 我们考虑下面的函数:

$$\phi_\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{(m-2)\omega_m} r^{2-m} & (r \geq \delta \text{ 时}), \\ \frac{1}{2\omega_m \delta^m} \left(\frac{m\delta^2}{m-2} - r^2 \right) & (r < \delta \text{ 时}). \end{cases}$$

ϕ_δ 是一次連續可微的函数, 至于它的二阶导数, 在 $r=\delta$ 处虽不連續, 但是有界 ($r>\delta$ 时, $\phi_\delta=\phi(r)$), 即有

$$0 \leq r < \delta \text{ 时 } \partial_{ij}^2 \phi_\delta = -\frac{\delta^{-m}}{\omega_m} \delta_{ij}.$$

所以令

$$u_\delta(x) = - \int_B \phi_\delta(r) f(x') d^m x'$$

后, 則有

$$\partial_i u_\delta(x) = - \int_B \partial_i \phi_\delta(r) f(x') d^m x',$$

$$\partial_{ij}^2 u_\delta(x) = - \int_B \partial_{ij}^2 \phi_\delta(r) f(x') d^m x'.$$

由于 $|\phi_\delta| \leq \mu r^{2-m}$, $|\partial_i \phi_\delta| \leq u' r^{1-m}$ (u, u' 常数), 所以可以理解, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $u_\delta(x)$ 及 $\partial_i u_\delta(x)$ 都是一致收斂的。其次, 由于

$$\begin{aligned} \partial_{ij}^2 u_\delta &= - \left(\int_{|x'-x|<\delta} + \int_{B, |x'-x|>\delta} \right) \partial_{ij}^2 \phi_\delta(r) f(x') d^m x' \\ &= \frac{\delta_{ij}}{\omega_m \delta^m} \int_{|x'-x|<\delta} f(x') d^m x' + \int_{B, |x'-x|>\delta} \partial_{ij}^2 \phi(r) f(x') d^m x', \end{aligned}$$

所以当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 右边的第一个积分一致收斂于 $m^{-1} \delta_{ij} f(x)$ 。又从 (32.18) 与 $|\partial_{ij}^2 \phi| \leq u'' r^{-m}$ (u'' 常数), 并利用

$$\int_{\delta' < |x'-x| < \delta} \partial_{ij}^2 \phi(r) d^m x' = 0,$$

則得

$$\begin{aligned} & \int_{\delta' < |x'-x| < \delta} \partial_{ij}^2 \phi(r) f(x') d^m x' \\ &= \left| \int_{\delta' < |x'-x| < \delta} \partial_{ij}^2 \phi(r) \{f(x') - f(x)\} d^m x' \right| \leq \mu u'' \alpha^{-1} \omega_m \delta^\alpha, \end{aligned}$$

所以当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\partial_{ij}^2 u_\delta$ 是一致收斂的。但是 u 二次連續可微, 因此有

$$\partial_{ij}^2 u(x) = \frac{\delta_{ij}}{m} f(x) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B, |x'-x|>\delta} \partial_{ij}^2 \phi(r) f(x') d^m x'.$$

另一方面, 当 $x \neq x'$ 时, $\Delta \phi = 0$, 于是从上式可得到 $\Delta u = f(x)$ 。

3. Poisson 积分 当任意給定了 $f(x)$ 时, 利用 (32.13) 就可求得 Poisson 方程 (32.7) 的一个解。这就是說, 只要得到 Laplace 方程对任意边界值的 Dirichlet 問題的解, 就能得到 Poisson 方程

相应問題的解。对于区域是一般的情形，問題并不簡單。但是如果 B 是球体，則用 Poisson 积分就能得到解。我們在 § 20 中已經講过 $m=2$ 的情形，現在來說明 $m \geq 3$ 的情形。

設 x^0 是单位球 $|x^0| < 1$ 內的一个点， x^0 对单位球面的鏡象点是 $x^{0'} = x^0 / |x^0|^2$ ，当 $x \neq x^{0'}$ 則 $(|x^0| / |x - x^{0'}|)^{2-m}$ 是以 x 为变数的調和函数，由于 $|x^{0'}| = 1$ ，所以函数

$$G(x, x^0) = \frac{1}{(m-2)\omega_m} \left\{ |x - x^0|^{2-m} - (|x^0| / |x - x^{0'}|)^{2-m} \right\} \quad (32.19)$$

在 $|x| \leq 1$ 是 Laplace 方程的基本解。令

$$\sum_{i=1}^m x_i x_i^0 = x \cdot x^0,$$

則 (32.19) 可以写成下面的形状

$$G(x, x^0) = \frac{1}{(m-2)\omega_m} \left\{ (|x|^2 + |x^0|^2 - 2x \cdot x^0)^{\frac{2-m}{2}} - (1 + |x^0|^2 |x|^2 - 2x \cdot x^0)^{\frac{2-m}{2}} \right\}.$$

由此可見，当 $|x| = 1$ 时， $G(x, x^0) = 0$ ，故 $G(x, x^0)$ 就是关于单位球 $|x| < 1$ 的 Green 函数。其次，容易証明

$$G(x, x^0) = G(x^0, x). \quad (32.20)$$

如果令 $|x| = \rho$ ， $|x^0| = r$ ， $x^0 \cdot x = r\rho \cos \theta$ ，則有

$$\begin{aligned} \partial_n G|_{|x|=1} &= \frac{-1}{(m-2)\omega_m} \partial_\rho \left\{ (\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta)^{\frac{2-m}{2}} - (1 + r^2 \rho^2 - 2r\rho \cos \theta)^{\frac{2-m}{2}} \right\}_{\rho=1} \\ &= \frac{-1}{\omega_m} \frac{1 - r^2}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^{\frac{m-2}{2}}}. \end{aligned}$$

假設所求的解 u 存在的話，把 x^0 写成一般的 x ，并在单位球面 $S: |\xi| = 1$ 上給定了 $u = g(\xi)$ ，則根据 (32.11) 就能得到下列的 Poisson 积分公式

$$u(x) = \frac{1}{\omega_m} \int_S \frac{(1-r^2)g(\xi)}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{\frac{m-2}{2}}} dS(\xi) \quad (32.21)$$

$$(r=|x|, \quad \cos\theta=\xi \cdot x/r).$$

反过来, 当任意給定了連續函数 $g(\xi)$ 时, 我們現在来証明, (32.21) 表示一个調和函数 u , 并在 S 上有 $u=g(\xi)$. 根据 (32.20), 当 $x \neq \xi$ 时, $G(\xi, x)$ 关于 x 是調和的。于是 $\partial_n G(\xi, x)$ 当 $|\xi|=1$, 而 $|x|<1$ 时也是 x 的調和函数。因为 (32.21) 实际上就是公式

$$u(x) = \int_S \partial_n G(\xi, x) g(\xi) dS(\xi)$$

的詳細的写法, 所以 $u(x)$ 当 $|x|<1$ 时是 x 的調和函数。此外, 还可以象 § 20 中的情形一样, 証明当 $x \rightarrow \xi^0$ 时 $u(x) \rightarrow g(\xi^0)$.

于是对于区域是球的情形, 已証明了 Poisson 方程的 Dirichlet 問題解的唯一性 (因为調和函数經過相似变换 仍然变成調和函数)。

此外, 在 (32.21) 中如設 $r=0$, 則有

$$u(0) = \frac{1}{\omega_m} \int_S g(\xi) dS(\xi). \quad (32.22)$$

即: 調和函数在球中心处的值是它在球表面上的值的平均值。

注意 2 当 $m=2$ 时, 已經知道 Laplace 方程对于圓的 Dirichlet 問題是可解的。但是对于平面上由简单閉曲綫 Γ 所圍成的区域 B , 恒可用等角映象映在单位圓上 (映象为 1-1 对应并且直到边界連續), 所以也就能解决关于区域 B 的 Dirichlet 問題。但是当 $m \geq 3$ 时, 一般不能用等角映象使球与一般的区域相对应, 所以需要用別的方法来討論。另外, 調和函数还具有种种特殊的性質, 詳細的討論此处从略 (参看井上正雄: 势函数論)。

§ 33 二阶椭圆型方程的基本解

1. 基本解 本节的目的, 是把前节中所定义的基本解扩張到一般的二阶椭圆型方程的情形。設

$$L[u] = \sum_{i=1}^m \partial_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(x) \partial_j u \right) + \sum_{i=1}^m \beta_i(x) \partial_i u + c(x)u, \quad (33.1)$$

这里 a_{ij}, β_i, c 都是 x 的一次連續可微函数。

对于任意給定的一次連續可微函数 $f(x)$, 如果

$$u(x) = - \int_B V(x, y) f(y) d^m y, \quad (33.2)$$

$$y = (y_1, \dots, y_m)$$

$$\text{是方程} \quad L[u] = f(x) \quad (33.3)$$

的解, 那么就称 $V(x, y)$ 为 $L[u] = 0$ 的基本解, 也叫初等解。

如果 u 是方程 (33.3) 的解, 那么它也是方程的广义解, 所以对于区域 B 的任意試驗函数 w , 必然成立:

$$\int_B u L^*[w] d^m x = \int_B f \cdot w d^m x. \quad (33.4)$$

現在根据 (33.2), 有

$$\begin{aligned} \int_B u L^*[w] d^m x &= - \int_B \left\{ \int_B V(x, y) f(y) d^m y \right\} L^*[w](x) d^m x \\ &= - \int_B \left\{ \int_B V(x, y) \cdot L^*[w](x) d^m x \right\} f(y) d^m y. \end{aligned}$$

于是从 (33.4) 有

$$- \int_B \left\{ \int_B V \cdot L^*[w] d^m x \right\} f(y) d^m y = \int_B f(y) w(y) d^m y.$$

因为函数 $f(x)$ 是任意的, 所以对于 B 的任意試驗函数 w 成立

$$- \int_B V(x, y) \cdot L^*[w](x) d^m x = w(y). \quad (33.5)$$

反过来, 对于用 (33.2) 所定义的 u , 由 (33.5) 就能証明 (33.4) 必然成立。这也就是说 u 是 (33.3) 的广义解 (見注意 2)。

現在更具体地来討論一下具有下列性质的 $V(x, y)$:

(i) 設 $V(x, y), \partial_i V(x, y), \partial_i^2 V(x, y)$ 对 $x, y \in \bar{B}$ (B 的閉包), 当 $x \neq y$ 时, 都是 x, y 的連續函数 (∂_i 是对 x_i 所作的微分)。

$$(ii) \quad L_x[V(x, y)] = 0 \quad (x \neq y). \quad (33.6)$$

L_x 表示关于 x 的微分算子。

(iii) 設 $S_\varepsilon(y)$ 是以点 y 为中心, ε 为半径的球面, 并有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(y)} \partial_N V(x, y) dS(x) = -1. \quad (33.7)$$

$$(iv) \quad \partial_i V(x, y) = O(|x - y|^{1-n}) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (33.8)$$

現在来証明, 对于满足上列条件的 $V(x, y)$, (33.5) 成立 (w 为任意的試驗函数)。首先由 (33.8) 容易地有

$$V(x, y) = O(|x - y|^{2-n}). \quad (33.9)$$

如果令 B 中除去 S_ε 内部的区域为 B_ε , 对这个区域令 $u = V(x, y)$, $v = w(x)$, 并使用 Green 公式 (26.10), 由于在 I' 上有 $w = \partial_N w = 0$, 所以由 (33.6) 有

$$\begin{aligned} & \int_{B_\varepsilon} V \cdot L^*[w] d^n x \\ &= - \int_{S_\varepsilon(y)} \{V \cdot (\partial_N w + \beta_N w) - w \partial_N V\} dS(x). \end{aligned} \quad (33.10)$$

在 y 的邻域内 $\partial_N w + \beta_N w$ 有界。此外, 根据 (33.8), 由于对 $x \in S_\varepsilon(y)$,

$$\partial_N V = O(\varepsilon^{1-n}), \quad S_\varepsilon(y) \text{ 的面积} = O(\varepsilon^{n-1}), \quad (33.11)$$

所以当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\int_{S_\varepsilon(y)} V \cdot (\partial_N w + \beta_N w) dS(x) \rightarrow 0, \quad (33.12)$$

而由 (33.11) 及 $w(x)$ 的連續性, 有

$$\int_{S_\varepsilon(y)} \{w(x) - w(y)\} \partial_N V(x, y) dS(x) \rightarrow 0, \quad (33.13)$$

又根据 (33.7) 及 (33.13) 可知

$$\int_{S_\varepsilon(y)} w \partial_N V dS(x) \rightarrow -w(y). \quad (33.14)$$

最后由 (33.10), (33.12), (33.14), 就得到 (33.5)。

對於滿足 (i), (ii), (iii), (iv) 的 $V(x, y)$, 如果根據 (33.2) 所得到的 $u(x)$ 是二次連續可微的話, 那麼 $V(x, y)$ 就是 $L[u]$ 的 (純正) 基本解。以後我們規定, 把具有性質 (i), (ii), (iii), (iv) 的函數 $V(x, y)$, 叫做 $L[u]=0$ 的基本解。

在 § 32 中已經給出了 Laplace 方程的基本解。現在考慮常系數方程 (僅具主部)

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_{ij}^2 u = 0 \quad (33.15)$$

的情形。

設系數所成矩陣 (a_{ij}) 的逆陣是 $(a_{ij})^{-1}$, 于是有

$$(a_{ij})^{-1} = (A_{ij}), \quad \det(a_{ij}) = |a|, \quad (33.16)$$

令

$$r(x, y) = \sqrt{\sum_{i,j}^{m,m} A_{ij} (x_i - y_i) (x_j - y_j)},$$

并令

$$V(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{|a|}} \log \{1/r(x, y)\} & (m=2), \\ \frac{1}{(m-2)\omega_m\sqrt{|a|}} r(x, y)^{2-m} & (m \geq 3), \end{cases} \quad (33.17)$$

那麼就能夠證明 $V(x, y)$ 是 (33.15) 的基本解。事實上, 利用獨立變數間的一次變換 $x' = Tx$ (T 是常系數的矩陣), 就能夠把 (33.17) 變成方程 $\Delta u = 0$ 的基本解 (32.6)。證明如下:

當獨立變數由 x 變成 $x' = Tx$ 時, 如設

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_{ij}^2 u = \sum_{i,j=1}^{m,m} a'_{ij} \partial_{ij}^2 u,$$

由於

$$(a'_{ij}) = T(a_{ij})T^* \quad (T^* \text{ 是 } T \text{ 的轉置矩陣}),$$

所以令 $y' = Ty$ 後, 就有

$$\begin{aligned} (x' - y')^* (A'_{ij}) (x' - y') &= (T(x - y))^* (a'_{ij})^{-1} T(x - y) \\ &= (x - y)^* (a_{ij})^{-1} (x - y) = (x - y)^* (A_{ij}) (x - y). \end{aligned}$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} A'_{ij} (x'_i - y'_i) (x'_j - y'_j) = \sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij} (x_i - y_i) (x_j - y_j).$$

故 r 对于变换 T 是不变的, 即 $r(x, y) = r(x', y')$. 现在特别取 T 为这样的矩阵, 它使得

$$(a'_{ij}) = T(a_{ij})T^* = (\delta_{ij}),$$

由于 $1 = \det(\delta_{ij}) = \det(T)^2 \det(a_{ij})$, 所以

$$\det(T) = 1/\sqrt{|a|}.$$

因此, 如果 $W(x, y)$, $\varphi(y)$ 是任意的函数, 则经过变换 $x' = Tx$, $y' = Ty$ 后, 下列的关系式应该成立

$$\begin{aligned} \int_{B'} W(x', y') \varphi(y') d^m y' \\ = \int_B W(x, y) \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{|a|}} d^m y. \end{aligned} \quad (33.18)$$

再因 $L_x[u] = \Delta_x u$, 所以由 (33.18) 及 (32.6), 就能说明 (33.17) 是方程 (33.15) 的基本解。

注意 1 关于 (33.2) 中的 $V(x, y)$, 我们至少需要下列假设条件, 即当 $x, y \in \bar{B}$, 而 $x \neq y$ 时, 它是 (x, y) 的连续函数, 并且满足条件

$$\begin{aligned} \int_B |V(x, y)| dy < \infty, \quad \int_B |V(x, y)| dx < \infty, \\ \int_B \int_B |V(x, y)| dx dy < \infty. \end{aligned}$$

如果对函数 $V(x, y)$, (i) 及 (33.9) 成立, 那么上面的条件必然会成立。

注意 2 如把 $V(x, y)$ 看成是关于变数 x 的广义函数 $V_{(x)}$, 那么对关于 B 的任意试验函数 w , 就有关系式

$$L_x V_{(x)}(w) = V_{(x)}(L^* w).$$

用广义函数论中的表示方法, (33.5) 可以写成下面的形状

$$L_x V_{(x)} = \delta_{(y)} \quad (\text{Dirac 算子}).$$

这个方程就是按广义函数論所作的基本解的定义。

习题 証明如(i)及(iv)成立, 則 $V(x, y)$ 作为 $L[u]=0$ 的基本解(根据最初的定义)的必要条件是(ii)及(iii)成立。

2. 拟基本解 (parametrix) 关于形状如 (33.1) 但是系数不是常数的 $L[u]$, Hilbert 和 E. Levi 采取了下面的方法以代替直接求 $L[u]=0$ 的基本解:

首先仍如 (33.16) 那样地定义 A_{ij} 及 a_i , 并令

$$\left. \begin{aligned} r(x, y) &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} A_{ij}(y) (x_i - y_i)(x_j - y_j)}, \\ H(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{|a(y)|}} \log \{1/r(x, y)\} & (m=2), \\ \frac{1}{(m-2)\omega_m\sqrt{|a(y)|}} r(x, y)^{2-m} & (m \geq 3). \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (33.19)$$

对于任意連續可微函数 $\varphi(y)$, 如果使用上面的 $H(x, y)$, 作出如下的 $u(x)$:

$$u(x) = - \int_B H(x, y) \varphi(y) d^m y, \quad (33.20)$$

那么可以証明 (Levi 1909 年)

$$\left. \begin{aligned} L[u] &= \varphi(x) + \int_B K(x, y) \varphi(y) d^m y, \\ \text{这里 } K(x, y) &= L_x[H(x, y)]. \end{aligned} \right\} \quad (33.21)$$

Hilbert 称这样的函数 $H(x, y)$ 为 parametrix, 而 Gevrey 称它为拟基本 (quasi-elementary) 解。因此微分方程 (33.3) 的求解归結为解以 φ 为未知函数的 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x) + \int_B K(x, y) \varphi(y) d^m y = f(x). \quad (33.22)$$

現在如果对 $K(x, y)$ 存在着預解核 $\chi(x, y)$, 即如果成立

$$\left. \begin{aligned} \int_B K(x, s) \chi(s, y) d^m s &= \int_B \chi(x, s) K(s, y) d^m s, \\ \chi(x, y) + K(x, y) + \int_B K(x, s) \chi(s, y) d^m s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (33.23)$$

那麼根據下式

$$\varphi(x) \stackrel{*}{=} f(x) + \int_B \chi(x, y) f(y) d^n y \quad (33.24)$$

就能得到(33.22)的解 φ 的表达式。

再把(33.24)代入(33.20), 就得到(33.3)的解 u

$$\left. \begin{aligned} u(x) = - \int_B V(x, y) f(y) d^n y, \\ \text{这里 } V(x, y) = H(x, y) + \int_B H(x, s) \chi(s, y) d^n s. \end{aligned} \right\} \quad (33.25)$$

因此, 如果求到了滿足(33.23)的 $\chi(x, y)$, 那麼(33.25)中的 $V(x, y)$ 就是 $L[u] = 0$ 的基本解。當 B 相當小時, 滿足(33.23)的預解核 χ 可以用 Neumann 級數來表示, 即

$$\chi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K^{(n)}(x, y), \quad (33.26)$$

这里

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &= K(x, y), \\ K^{(n+1)}(x, y) &= \int_B K^{(n)}(x, s) K(s, y) d^n s. \end{aligned}$$

注意 3 如 $a_{ij}(x)$ 一次連續可微, 那麼當 $x \neq y$ 時, $H(x, y)$ 以及它對 x 的任意次導數都是 x, y 的連續可微函數。此外還有

$$\begin{aligned} H(x, y) &= O(|x-y|^{2-m}), \quad \partial_x H, \partial_y H = O(|x-y|^{1-m}), \\ \partial_{ij}^2 H &= O(|x-y|^{-m}). \end{aligned}$$

其次, 對形狀如(31.12)的 $L[u]$, 如它的係數函數都一次連續可微, 則 $K(x, y) = L_x[H]$ 對 $x \neq y$, 也是 x, y 的連續可微函數, 並有

$$K(x, y) = O(|x-y|^{1-m}), \quad \partial_x K, \partial_y K = O(|x-y|^{-m}).$$

以此為根據還能證明函數 $\chi(x, y)$ (假設存在的話) 具有與 K 同樣的性質。

由此就能證明 $V(x, y)$, $\partial_x V$ 在 $x \neq y$ 時也連續可微, 並滿足關係式

$$V(x, y) = O(|x-y|^{2-m}), \quad \partial_x V, \partial_y V = O(|x-y|^{1-m}).$$

特別在證明(33.21)式時, 下面的關係

$$\partial_{ij}^2 H + \partial_i \partial_j' H = O(|x-y|^{1-m}) \quad (\partial_j' \text{ 表示對 } y_j \text{ 的微分})$$

是非常重要的。[(33.2) 中的 $u(x)$ 才成為二次連續可微。]

要詳細地證明上列事實, 需要很多篇幅, 本書不能滿足這種要求, 只能把一些必要的定理列舉如下。(讀者可參看 Miranda: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico 第2章。)

定理 33.1 設 $K(x, y)$ 當 $x, y \in \bar{B}$, 而 $x \neq y$ 時連續, 並且滿足條件

$$|K(x, y)| \leq c|x-y|^{\alpha-m} \quad (\alpha > 0),$$

如果 $\varphi(y)$ 在 B 上有界可測函數, 那麼

$$u(x) = \int_B K(x, y) \varphi(y) d^m y \quad (33.27)$$

在 \bar{B} 上連續。

定理 33.2 設 $K(x, y), \partial_x K(x, y)$ 當 $x, y \in \bar{B}$, 而 $x \neq y$ 時連續, 並且滿足條件

$$|\partial_x K(x, y)| \leq c|x-y|^{\alpha-m} \quad (\alpha > 0),$$

如果 $\varphi(y)$ 是 B 上有界可測函數, 那麼 (33.27) 在 \bar{B} 上就連續可微, 並且有

$$\partial_i u(x) = \int_B \partial_i K(x, y) \varphi(y) d^m y.$$

定理 33.3 設 $K(x, y)$ 當 $x, y \in \bar{B}$, 而 $x \neq y$ 時是 (x, y) 的連續可微函數, 並且

$$|K(x, y)| \leq c|x-y|^{\alpha-m} \quad (\alpha > 0),$$

$$|\partial_i K(x, y) + \partial_i' K(x, y)| \leq c'|x-y|^{\alpha'-m} \quad (\alpha' > 0).$$

如果 $\varphi(y)$ 在 \bar{B} 上連續可微, 那麼 (33.27) 也在 \bar{B} 上連續可微, 並且

$$\partial_i u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{B_\varepsilon} \partial_i K(x, y) \varphi(y) d^m y + \int_{S_\varepsilon(x)} K(x, y) \varphi(y) n_i dS(y) \right\},$$

這裡 $S_\varepsilon(x)$ 是以 x 為中心, ε 為半徑的球面, B_ε 是在 B 中除去 $S_\varepsilon(x)$ 內部所余的區域。(n_1, \dots, n_m) 是外向的單位法綫。

定理 33.4 設 $K_1(x, y), K_2(x, y)$ 當 $x, y \in \bar{B}$, 而 $x \neq y$ 時連續, 並有

$$|K_1(x, y)| \leq c_1|x-y|^{\alpha-m}, \quad |K_2(x, y)| \leq c_2|x-y|^{\beta-m} \quad (\alpha, \beta > 0),$$

則

$$K_3(x, y) = \int_B K_1(x, s) K_2(s, y) d^m s$$

當 $x, y \in \bar{B}$, $x \neq y$ 時也連續。此外

$$(i) \text{ 當 } \alpha + \beta < m \text{ 時, } |K_3(x, y)| \leq c_3|x-y|^{\alpha+\beta-m},$$

(ii) 当 $\alpha + \beta = m$ 时, $|K_s(x, y)| \leq c_3 \log(k/|x-y|)$,

(iii) 当 $\alpha + \beta > m$ 时, $K_s(x, y)$ 对 $x, y \in \bar{B}$ 連續。

定理 33.5 設 $K(x, y)$ 当 $x, y \in \bar{B}$, 而 $x \neq y$ 时是 (x, y) 的連續可微函数。并且

$$|\partial_x K| \leq c_1 |x-y|^{-m}, \quad |\partial_y K| \leq c_1 |x-y|^{-m},$$

$$|\partial_i K(x, y) + \partial'_i K(x, y)| \leq c' |x-y|^{1-m}.$$

此外, 如果 $H(x, y), \partial_x H(x, y)$ 对 $x, y \in \bar{B}, x \neq y$ 連續, 而

$$|\partial_x H(x, y)| \leq c_2 |x-y|^{\alpha-m} \quad (\alpha > 0),$$

并且令

$$J(x, y) = \int_B K(x, s) H(s, y) d^m s,$$

則 $J, \partial_x J$ 对 $x, y \in \bar{B}, x \neq y$ 連續, 并且对 B 內任一有界集合 B_0 , 有

$$|\partial_x J(x, y)| \leq C(B_0) |x-y|^{\alpha-m}.$$

§ 34 二阶椭圆型方程的 Green 函数

1. Dirichlet 問題的 Green 函数 設 $V_0(x, y)$ 是 $L[u] = 0$ 的一个基本解, 那么容易理解, 对这个基本解加上一个 $L[u] = 0$ 的正則解 $u = w(x, y)$ (y 是参数) 之后, 就有

$$V(x, y) = V_0(x, y) + w(x, y),$$

$V(x, y)$ 仍是 $L[u] = 0$ 的基本解。

如果伴随方程 $L_x^*[v] = 0$ 的基本解 $V(x, y)$ 在 B 的边界 $x \in \Gamma$ 上滿足条件 $V(x, y) = 0$, 它就叫做 $L_x[u] = 0$ 关于区域 B 的 **Green 函数**。現在設 u 是 (33.3) 的解。如在 Green 公式 (26.10) 內令 $v = V(x, y)$, 由于

$$\int_{B_\epsilon} \{V L^*[u] - u L^*[V]\} d^n x$$

$$= \left(\int_\Gamma - \int_{S_\epsilon(y)} \right) \{V (\partial_A u + \beta_A u) - u \partial_A V\} dS(x)$$

(这里的 $B_\epsilon, S_\epsilon(y)$ 与前节的意义相同)。所以得到下面的公式

$$\int_{n_r} V \cdot f d^n x = - \int_r \partial_N V \cdot u dS(x) + \int_{S_\varepsilon(y)} \partial_N V \cdot u dS(x).$$

于是当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 这个公式的极限式(根据 (iii) 及 (iv)) 写入了变数 x, y 后就成为

$$u(x) = - \int_n V(y, x) f(y) d^n y - \int_r \partial_N V(y, x) u(y) dS(y). \quad (34.1)$$

因此, 如果 (33.3) 的解存在, 那么它就可用 (34.1) 来表示。这里我们如果以 $V(y, x)$ 作为 y 的函数, 则它就是 $L_y^*[v] = 0$ 的基本解。此外, 如果以 $V(y, x)$ 作为 x 的函数, 则它是 $L_x[u] = 0$ 的基本解。这个断言的理由非常简单, 因为如果 $L_x^*[v] = 0$ 的 (Green 函数为 $V^*(x, y)$ (即它是 $L_x[u] = 0$ 的基本解), 于是应该有下关系

$$V^*(x, y) = V(y, x). \quad (34.2)$$

特别是当 $L = L^*$ (即 L 是自伴的) 时, 则由对称性可知 $V(x, y) = V(y, x)$ 。

所以, 当 Green 函数 $V(x, y)$ 存在, $f(x)$ 连续可微, 并在 Γ 上任意给定 $u(x) = g(x)$ (连续) 的时候, (34.1) 就给出了 Dirichlet 问题的解。

(34.2) 的证明 设在 B 内任取二点 y^1 与 y^2 ($y^1 \neq y^2$), 以这两点为中心, ε 为半径分别作二个不相交的球面 $S_\varepsilon^1, S_\varepsilon^2$, 令在 B 内除去 S_ε^1 及 S_ε^2 内部所余的区域为 B_ε . 置 $u = V^*(x, y^1) = V_1^*$,

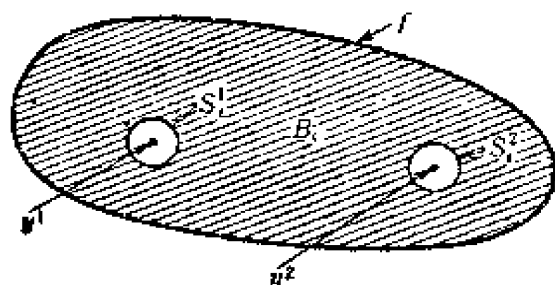


图 34.1

$v = V(x, y^2) = V_2$, 使用 Green 公式 (26.10), 就有

$$\int_{B_\varepsilon} \{V_2 L[V_1^*] - V_1^* L[V_2]\} d^n x = 0,$$

由于当 $x \in \Gamma$ 时, $V_1^* = V_2 = 0$, 所以

$$\left(\int_{S_\varepsilon^1} + \int_{S_\varepsilon^2} \right) (V_2 \partial_N V_1^* - V_1^* \partial_N V_2 + \beta_N V_2 V_1^*) dS(x) = 0. \quad (34.3)$$

再由于在 $x=y^1$ 的邻域, $-\partial_N V_2 + \beta_n V_2$ 連續, 并且

$$V_1^* = O(|x - y^1|^{2-\varepsilon}), \quad \partial_N V_1^* = O(|x - y^1|^{1-\varepsilon}),$$

因此当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\int_{S_1} (-\partial_N V_2 + \beta_n V_2) V_1^* dS(x) \rightarrow 0. \quad (34.4)$$

此外, 对于 V_1^* , 根据 (iii) 及 (iv) 有

$$\int_{S_1} V_2 \partial_N V_1^* dS(x) \rightarrow -V(y^1, y^2). \quad (34.5)$$

同样地有

$$\int_{S_2} (\partial_N V_1^* + \beta_n V_1^*) V_2 dS(x) \rightarrow 0. \quad (34.6)$$

$$\int_{S_2} V_1^* \partial_N V_2 dS(x) \rightarrow -V(y^2, y^1). \quad (34.7)$$

所以由 (34.3) ~ (34.7) 就得到

$$V(y^1, y^2) = V^*(y^2, y^1). \quad \text{証毕}$$

2. Neumann 問題的 Green 函数 設 $\alpha(x)$ 是定义在 B 的边界 Γ 上的一个函数, 又在 Γ 上給定函数 $g(x)$. 現在求方程 (33.3) 的解 u , 它在 Γ 上要滿足条件

$$\partial_N u + \alpha \cdot u = g(x) \quad (x \in \Gamma). \quad (34.8)$$

这样的問題叫做**广义的 Neumann 問題**. 这时, 关于边界 Γ 上的共轭微分算子 D_N 及 D_N^* , 可用下列的公式定义:

$$\left. \begin{aligned} D_N u &= \partial_N u + \alpha u, & D_N^* u &= \partial_N u - \alpha^* u, \\ \alpha + \alpha^* &= \beta_n, \end{aligned} \right\} \quad (34.9)$$

这里

于是有

$$v \partial_N u - u \partial_N v + \beta_n uv = v D_N u - u D_N^* v,$$

从而可以把 Green 公式写成下面的形状

$$\int_B \{v L[u] - u L^*[v]\} d^n x = \int_\Gamma \{v D_N u - u D_N^* v\} dS(x). \quad (34.10)$$

这样我們就可以把关于 $L[u] = 0$ 的广义 Neumann 問題的 Green

函数定义为 $L_x[v] = 0$ 的基本解 v , 对于 v 要求当 $x \in I$ 时, $D_N v = 0$.

如果 Green 函数存在的话, 那么关于

$$L[u] = f(x), \quad D_N u = g(x) \quad (x \in I) \quad (34.11)$$

的 Neumann 問題的解(假設解存在), 就象 Dirichlet 問題的情形一样, 可以由下列公式給出

$$u(x) = - \int_B V(y, x) f(y) d^n y + \int_I V(y, x) g(y) dS(y). \quad (34.12)$$

其次, 关于 $V(x, y)$ 的共轭 Green 函数 $V^*(x, y)$, 可以定义为方程 $L_x[u] = 0$ 满足条件“ $x \in I$ 时, $D_N u = 0$ ”的基本解。此外, 和 Dirichlet 問題的情形一样, 这里也成立公式

$$V^*(x, y) = V(y, x). \quad (34.13)$$

注意 对于 Dirichlet 問題的 Green 函数, 我們只說明了边界是光滑的情形, 对不光滑的边界也可以定义 Green 函数。不过, 这时由于不能使用关于边界的导数, 所以 (34.2) 的証明是非常困难的。对于特殊情形的 Laplace 方程, 这种証法見井上正雄: 势函数論 85 頁。

§ 35 关于橢圓型方程的补充說明

有許多关于橢圓型方程的重要結果, 限于本书的篇幅, 不能作詳細說明, 在此仅作簡單的介紹。

1. 关于 Dirichlet 問題解的存在性

(a) 綫性的情形。当区域 B 相当的小, 并且边界 I 相当光滑时, 就象势函数論中所作的那样, 使用由基本解所形成的二重势函数(关于 I 面的), 就能把 Dirichlet 問題归結为关于 I 上积分的 Fredholm 积分方程。因此, 对于相当小的球 Dirichlet 問題是可解的。

如区域 B 相当小, 并且存在着如 (31.13) 的函数 $\omega(x)$, 那么就可以使用調和函数中关于优(劣)調和函数的方法, 只要規定边界 I 滿足适当的条件, 譬如 Poincaré 条件 (即对 I 的各点存在着以

这点为顶点,并在顶点的近傍落在 B 外的锥体),那么对 Γ 上已给的連續任意边界值, Dirichlet 問題就存在着唯一的解,而且这个解連續依赖于已给的边界值(即边界条件的适切性)。Oleynik 曾指出,对于边界 Γ 只要规定了与調和函数情形相同的条件就能保証 Dirichlet 問題解的存在。見 Matemat. Sbornik, 24 (1949), p. 1~14.

(b) 半綫性的情形。假設 $L[u] \equiv \sum a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u = f(x, u, \partial_x u)$, 其中 $a_{ij}(x)$, $f(x, u, p)$ 一次連續可微(也可以換成較弱的适当条件)。并設存在着函数 $\underline{\omega}(x)$ 及 $\bar{\omega}(x)$, 使得对于 $\underline{\omega}(x) \leq u \leq \bar{\omega}(x)$,

$$|f(x, u, p)| \leq A + B |p|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 2),$$

如 $\alpha < 2$, 則这里的 B 是任意的常数, 如 $\alpha = 2$, 則 B 是相当小的数, 并在 $x \in B$ 时,

$$L[\underline{\omega}] > f(x, \underline{\omega}, \partial_x \underline{\omega}),$$

$$L[\bar{\omega}] < f(x, \bar{\omega}, \partial_x \bar{\omega}).$$

再設边界 Γ 滿足 Poincaré 条件, 且在 Γ 上已給定的边界值 $g(x)$ (連續函数) 滿足 $\underline{\omega}(x) \leq g(x) \leq \bar{\omega}(x)$. 在这些假設条件下, 就存在着 Dirichlet 問題的解 $u(x)$, 并滿足 $\underline{\omega}(x) < u(x) < \bar{\omega}(x)$. (見 Nagumo: Osaka Math. Jour., 6 (1954), p. 207~229.)

但是上面所說的解不一定是唯一的。如果 f 是关于 u 的递增函数, 那就能証明解的唯一性。当 $\alpha = 2$, 而 B 是任意常数时, 解是否唯一还是个未解決的問題。当 $\alpha > 2$ 时, 存在着相反的例子; 而当 $\alpha = 1$ 时, 是否能得到和上面 Oleynik 相同的結果, 仍然是一个存在的問題。

(c) 拟綫性的情形。考虑 $m = 2$, 并且仅含主部的方程

$$\sum_{i,j=1}^{2,2} a_{ij}(x, u, \partial_x u) \partial_{ij}^2 u = 0$$

而 B 是个凸集的情形。設由 Γ 上的边界值 $u = g(x)$ 所画出的曲

終具有這樣的性質：即包含它上面任意三點的平面的梯度限定在一定範圍內，Schauder 曾經證明，这时的 Dirichlet 問題的解是存在的，見 Math. Zeit., 37 (1933), p. 623 ~ 634. 当 B 不是凸集時，譬如对极小曲面的方程

$$(1+u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{yy} = 0,$$

如大家所熟知，就不一定存在着解（单值）。

对半綫性以及拟綫性方程 Dirichlet 解的存在性的証明，看来以綫性的情形为基础，使用函数空間的不动点原理的办法是适当的（見本丛书：常微分方程第3章）

对一般的拟綫性方程，当 B 是相当小的球，并且边界值十分近似常数時，存在着 Dirichlet 問題的解。这个断言，可以用逐次逼近法或函数空間的不动点原理，或是区域不变定理（Schauder 定理）来証明。

2. 解的正則性 綫性方程 $L[u] = f(x)$ 的解，在存在区域的内部，具有与方程系数及 f 相同程度的正則性。特別当方程的系数及 f 解析正則時，那么解也是解析正則的，即成立着“一致定理” 这是 Hilbert 問題之一。一致定理对非綫性的橢圓型方程也能成立。对 $m=2$ 的情形最初由 S. Bernstein (1904 年)，后来由 T. Radó 加以正确的証明了 (1926 年)。此外，对 $m=2$ 的情形，H. Lewy 利用双曲型方程，給出了一个非常有趣而巧妙的証法 (1929 年) (Courant-Hilbert II, p. 338)。至于最一般的橢圓型方程（包含高阶联立方程組）是由 Petrovski 証明的 (Mat. Sbornik 5 (1939), p. 3 ~ 70)。

橢圓型方程的解的集合叫做正規族。当 Dirichlet 問題恒存在着唯一解時，Harnack 定理（即如正規族的函数序列在边界上一致收斂，則在区域的内部直到二阶导函数也一致收斂）成立。

关于非解析正則的二阶橢圓型方程，它的解也成立着一致定

理, 这个事实是由 Aronszajn 及 Cordes 所证明的 (见 Cordes: Nachr. Akad. Wiss. (Göttingen 1956) 和 Aronszajn: University of Kansas, Technical Report (1956)).

3. 高阶方程 关于高阶线性椭圆型方程的基本解以及解的正则性问题, 这里推荐 E. John: General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations (Proceedings of the symposium on spectral theory and differential problems (1955)), 这本书中的讲法很容易理解,

此外, 对一般高阶椭圆型方程, 最近由 Friedrichs, Gårding, Lion, Lax, Nirenberg 等人创始, 以广义解为基础开展了崭新的研究体系。关于这方面的問題我們推荐讀者參看本丛书吉田耕作著的泛函分析。

4. 本征值問題 二阶椭圆型方程 (关于边值問題) 的本征值問題可參看 Hilbert-Courant II, 第 7 章。

第7章 双曲型偏微分方程

§ 36 正规双曲型方程

1. 正规方程 綫性方程

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^m b_i(x) \partial_i u + c(x)u = f(x) \quad (36.1)$$

叫做双曲型方程, 如果

$$|a_{ij}(x)|_{i,j=1,\dots,m} \neq 0, \quad (36.2)$$

并且二次型 $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j$ 是变号的。现在把独立变数 x 利用綫性变换

$$x'_\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_{\mu i} x_i, \quad |\alpha_{\mu i}|_{\mu=1,\dots,m} \neq 0 \quad (36.3)$$

变成 x' , 并要求变换后系数在一点 x^0 处具有特别简单的形状。由于经过变换 (36.3) 后, 有

$$L[u] = \sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} a'_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 u + \sum_{\mu=1}^m b'_\mu \partial'_\mu u + cu,$$

这里

$$a'_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \alpha_{\mu i} \alpha_{\nu j}, \quad (36.4)$$

所以适当的选取变换 (36.3) 可以使得在一点 $x = x^0$ 处, 矩阵 $(a'_{\mu\nu})$ 成为仅具有主对角綫的形状, 即

$$a'_{\mu\nu}(x^0) = \lambda_\mu \delta_{\mu\nu}.$$

如果 (36.3) 是正交变换, λ_μ 是矩阵 (a_{ij}) 的本征值, 根据 (36.2) 有 $\lambda_\mu \neq 0$ 。此外, 正的 λ_μ 以及负的 λ_μ 的个数与变换 (36.3) 无关。特别当其中一个 λ_μ 具有与其他的 λ_μ 不同的符号时, 就称 (36.1) 在

$x = x^0$ 是**正規双曲的**。如果 λ_μ 有二个以上是正的或負的, 那就称 (36.1) 在 $x = x^0$ 处是**超双曲的**。下面我们仅考虑 (36.1) 在某一个变域中是**正規双曲的**情形。如果对 (36.1) 适当的乘以 ± 1 , 那么可以使得 (a_{ij}) 的本征值中仅有一个是正的, 其他的都是負的。即 (a_{ij}) 属于

$$+, -, -, \dots, -$$

型。这时, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} p_i p_j = 0 \quad (36.5)$$

的面素叫做**类空** (space-like) 面素。对于由类空面素所形成的曲面 $\varphi(x) = 0$, 有

$$Q(\varphi, \varphi) = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i \varphi \partial_j \varphi = 0.$$

这样的曲面叫做**类空曲面**, 对类空面素 p 所形成的横截向量 ξ , 即

$$\xi_i = \lambda \sum_{j=1}^m a_{ij} p_j \quad (\lambda \neq 0) \quad (36.6)$$

叫做**类时** (time-like) 向量。

如令矩阵 (a_{ij}) 的逆阵为

$$(A_{ij})_{\substack{i,j=1,\dots,m}} = (a_{ij})_{\substack{i,j=1,\dots,m}}^{-1}, \quad (36.7)$$

则由 (36.6) 及 (36.7) 有

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij} \xi_i \xi_j = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} p_i p_j, \quad (36.8)$$

因此 ξ 为类时向量的充要条件是

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij} \xi_i \xi_j > 0 \quad (36.9)$$

(从 (36.6) 可以求出 p 关于 ξ 的表达式)。

对于 x 的变换 (36.3), 面素 p 的变换公式可以根据成带条件

$$du = \sum_{i=1}^m p_i dx_i = \sum_{\mu=1}^m p'_\mu dx'_\mu$$

得到, 即为

$$p_i = \sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu i} p'_\mu. \quad (36.10)$$

• 因为向量 ξ^I 与 x 有着相同的变换公式, 所以由 (36.4), (36.7), 就有

$$\sum_{\mu, \nu=1}^{m, m} A_{\mu\nu} \xi'_\mu \xi'_\nu = \sum_{i, j=1}^{n, n} A_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (36.11)$$

此外, 由 (36.4) 及 (36.10) 可知, 横截条件 (36.6) 关于变换 (36.3) 也是不变的。又 ξ 与 p 的内积也是不变的, 即

$$\sum_{i=1}^m \xi_i p_i = \sum_{\mu=1}^m \xi'_\mu p'_\mu. \quad (36.12)$$

最后我们称满足条件

$$\sum_{i, j=1}^{m, m} A_{ij} \xi_i \xi_j < 0 \quad (36.13)$$

的向量 ξ 为类空向量。

引理 面素 p 成为类空面素的条件 (36.5), 等价于和 p 正交, 即满足

$$\sum_{i=1}^m \xi_i p_i = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad (36.14)$$

的一切向量 ξ 成为类空向量的条件 (36.13)。

证 因为经过适当的变换, 可以使得在 $x = x^0$ 处

$$a_{11} = 1, \quad a_{ii} = -1 \quad (i = 2, \dots, m), \quad a_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

这时 $A_{ij}(x^0)$ 的形状与 $a_{ij}(x^0)$ 的形状完全一样。于是只要证明, 如果

$$p_1^2 - \sum_{i=2}^m p_i^2 > 0, \quad (36.15)$$

那么对满足 (36.14) 的 ξ , 必定有

$$\xi_1^2 - \sum_{i=2}^m \xi_i^2 < 0 \quad (36.16)$$

就够了。因为当 $\xi_1 = 0$ 时, (36.16) 显然成立, 所以只要证明 $\xi_1 \neq 0$

的情形。由 (36.14), 有 $2\lambda p_1 \xi_1 + 2\lambda \sum_{i=2}^m p_i \xi_i = 0$, 把这个式子与 (36.15) 相加, 就有

$$(p_1 + \lambda \xi_1)^2 - \sum_{i=2}^m (p_i - \lambda \xi_i)^2 > \lambda^2 \left(\xi_1^2 - \sum_{i=2}^m \xi_i^2 \right). \quad (36.17)$$

由于 $\xi_1 \neq 0$, 所以可取满足方程 $p_1 + \lambda \xi_1 = 0$ 的 λ , 这样, (36.17) 的左边就 < 0 . 于是 (36.16) 成立。

相反, 设对于满足 (36.14) 的 ξ 成立着 (36.16)。若是 $p_1 = 0$, 那么对 $\xi_1 \neq 0, \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_m = 0$, (36.14) 就应该成立。但是这个结果与 (36.16) 矛盾, 因此必有 $p_1 \neq 0$. 故由 (36.16) 及 (36.14) 就有

$$(\xi_1 + p_1)^2 - \sum_{i=2}^m (\xi_i - p_i)^2 < p_1^2 - \sum_{i=2}^m p_i^2. \quad (36.18)$$

这时, 如果令 $\xi_i = p_i$ ($i = 2, \dots, m$), $\xi_1 = -(p_2^2 + \dots + p_m^2)/p_1$, 那么 (36.14) 就应该成立, 从而 (36.18) 的左边 > 0 . 于是 (36.15) 成立。

証毕

2. 正规双曲型方程的标准型 设 $\varphi_1(x) = c$ 是类空曲面族, 即对函数 $\varphi_1(x)$ 有

$$Q(\varphi_1, \varphi_1) > 0. \quad (36.19)$$

根据 § 23 所說的方法, 选择 $m-1$ 个函数 $\varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, 使得

$$\left. \begin{aligned} Q(\varphi_1, \varphi_\nu) &= 0 \quad (\nu = 2, \dots, m), \\ \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (36.20)$$

现在令

$$t = \varphi_1(x), \quad x'_\nu = \varphi_\nu(x) \quad (\nu = 2, \dots, m),$$

并且取 (t, x'_2, \dots, x'_m) 代替 x 为独立变数, 则 (36.1) 就变成

$$\partial_{tt}^2 u + \sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} a'_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 u + b'_i \partial_i u + \sum_{\mu=2}^m b'_\mu \partial'_\mu u + cu = f. \quad (36.21)$$

的形状。这时对于 $(a'_{\mu\nu})$ 的二次型, 成立着关系式

$$\sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} a'_{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu < 0 \quad (\eta \neq 0). \quad (36.22)$$

为了证明上面的不等式, 令

$$\psi(x) = \sum_{\mu=2}^m \eta_\mu \varphi_\mu(x),$$

由(36.20)有

$$Q(\varphi_1, \psi) = \sum_{\mu=2}^m \eta_\mu Q(\varphi_1, \varphi_\mu) = 0. \quad (36.23)$$

又

$$\sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} a'_{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu = \sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} Q(\varphi_\mu, \varphi_\nu) \eta_\mu \eta_\nu = Q(\psi, \psi), \quad (36.24)$$

并设

$$\partial_i \varphi_1 = p_i, \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j \psi = \xi_i \quad (36.25)$$

(注意 $\xi \neq 0$), 于是根据(36.19), (36.23), (36.24), (36.25) 就有

$$\sum_{i, j=1}^{m, m} a_{ij} p_i p_j = Q(\varphi_1, \varphi_1) > 0, \quad \sum_{i=1}^m \xi_i p_i = Q(\varphi_1, \psi) = 0,$$

$$\sum_{i, j=1}^{m, m} A_{ij} \xi_i \xi_j = Q(\psi, \psi) = \sum_{\mu, \nu=2}^{m, m} a'_{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu.$$

根据引理, 就证明了(36.22)。

现在把 x'_2, \dots, x'_m 改写成 x_1, \dots, x_n ($n = m - 1$), 再根据 § 23, 置

$$u = \exp\left(-\frac{1}{2} \int b' dt\right) v,$$

这样, 就可以得到下列标准型方程

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v - \sum_{i, j=1}^{n, n} a_{ij}(t, x) \partial_{ij}^2 v + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_i v + c(t, x) v \\ = f(t, x) \end{aligned} \quad (36.26)$$

(∂_i 表示对 x_i 的微分)。这里 t 叫做类时变数, x 叫做类空变数。

注意 如果在(36.25)中 $\xi = 0$, 那么由(36.2)一定有 $\partial_i \psi = 0$, 即

$$\sum_{\mu=2}^m \partial_i \varphi_\mu \eta_\mu = 0 \quad (i=1, \dots, m),$$

根據上式及 (36.20) 就有 $\eta_\mu = 0$, 故如 $\eta \neq 0$, 那麼必有 $\xi \neq 0$.

§ 37 Cauchy 問題解的決定區域

1. 射綫錐 對於正規雙曲型方程 (標準型)

$$L[u] = \partial_{tt}^2 u - \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^m b_i \partial_i u + cu = f, \quad (37.1)$$

設 a_{ij}, b_i, c, f 都是 (x, t) 的函數, 並且有 $\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \xi_i \xi_j > 0 \quad (\xi \neq 0)$.

為了方便起見把 t 寫成 x_{m+1} , 則 (37.1) 的特徵方程, 如以 s 為參數, 就可以寫成下面的樣子:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} x_i &= -\sum_{j=1}^m a_{ij}(x) p_j, & \frac{d}{ds} x_{m+1} &= p_{m+1}, \\ \frac{d}{ds} p_i &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m,m} \partial_i a_{jk}(x) p_j p_k, & \frac{d}{ds} p_{m+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37.2)$$

如令 $a_{ij}(x^0) = a_{ij}^0$, 那麼通過一點 $x = x^0$ 的特徵射綫就是方程組 (37.2) 滿足條件

$$\begin{aligned} s=0 \text{ 時, } x &= x^0, \quad p_i = \pi_i, \quad p_{m+1} = \varepsilon \left(\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}^0 \pi_i \pi_j \right)^{1/2} \\ &(\varepsilon = \pm 1) \end{aligned} \quad (37.3)$$

的解

$$x_i = X_i(s, \pi), \quad p_i = P_i(s, \pi) \quad (37.4)$$

的支持曲綫 $x = X(s)$.

如在 (37.2) 中設 $s = ks'$ (k 常數), 再在變換後的 (37.2) 式中, 把 s' 还原成 s , 那麼可以看出, 所得到的公式就是把 p 寫成 kp 的式子。所以有 $X_i(ks', \pi) = X_i(s', k\pi)$. 因此 $X_i(s, \pi)$ 必是 $s\pi = (s\pi_1, \dots, s\pi_m)$ 的函數, 即

$$X_i(s, \pi) = \psi_i(s\pi_1, \dots, s\pi_m). \quad (37.5)$$

由于 $x_i = X_i$ 应该是 (37.2) 的解, 所以从 (37.5) 得到

$$\partial_s X_i = - \sum_{j=1}^m \{a_{ij}(x) p_j\}_{(x,p)=(X,P)} = \sum_{j=1}^m \{\partial_i \psi_i(\xi) \pi_j\}_{\xi=s\pi}.$$

于是当 $s=0$ 时, 有

$$- \sum_{j=1}^m a_{ij}^0 \pi_j = \sum_{j=1}^m \partial_i \psi_i(0) \pi_j, \text{ 即 } \partial_i \psi_i(0) = -a_{ij}^0.$$

因此由 (36.2), 就有

$$|\partial_i \psi_i(0) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}^0}{a_{jj}^0}| \neq 0.$$

于是, 在 $x = x^0$ (即 $\xi = 0$) 的邻域中, 可以从方程组

$$x_i = \psi_i(\xi) \quad (i=1, \dots, m) \quad (37.6)$$

把 ξ 解出作为独立变数 x 的函数

$$\xi_i = \varphi_i(x) \quad (i=1, \dots, m). \quad (37.7)$$

对于 $t = x_{m+1}$, 由于 (37.2) 及 (37.3) 有

$$t - t_0 = \varepsilon s \left(\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}^0 \pi_i \pi_j \right)^{1/2}. \quad (37.8)$$

又对于 $x_i = X_i$, 根据 (37.5) 及 (37.6) 有 $\xi_i = s\pi_i$, 所以由 (37.7) 及 (37.8) (设 $s \geq 0$) 得到

$$t - t^0 = \varepsilon \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}^0 \varphi_i(x) \varphi_j(x)} \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (37.9)$$

这就是说, 通过 (t^0, x^0) 的特征射线, 在 $x = x^0$ 邻域的 (t, x) 空间内, 构成了曲面 (37.9)。由于在 $\varphi_i(x^0) = 0$, $x = x^0$ 的邻域中, 当 $x \neq x^0$ 时, $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (0, \dots, 0)$, 所以 (37.9) 形成了以 (t^0, x^0) 为顶点的锥状曲面。这曲面叫做以 (t^0, x^0) 为顶点的射线锥 (ray conoid)。它是 (37.1) 的特征曲面 (见注意)。当 $\varepsilon = 1$ 时, 它叫前进锥, $\varepsilon = -1$ 时叫后退锥。

注意 1 在 (37.9) 中, 对应于 $\varepsilon = 1$ 或 -1 的 $\varphi_i(x)$ 一般是相异的函数。至于 (37.9) 是 (37.1) 的特征曲面的理由, 可以作如下的解释: 令

$$t = t^0 + p_{m+1}s, \quad w = x_{m+1}, \quad q_i = -p_i/p_{m+1} \quad (i=1, \dots, m),$$

则 $w = t$, 由 (37.2) 就知道, 应该成立下面的公式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i &= \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, w) q_j, \quad \frac{d}{dt} w = 1, \\ \frac{d}{dt} q_i &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m,m} \partial_i a_{jk}(x, w) q_j q_k \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (37.10)$$

此外, 由 (37.2) 及 (37.3) 不难导出下面的方程^①

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x, w) p_i p_j = p_{m+1}^2,$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x, w) q_i q_j - 1 = 0. \quad (37.11)$$

因此方程組 (37.10) 的解 $\{x, w, q\}(t)$ 就是偏微分方程 (37.11) (这里 $q_i = \partial_i w$) 的特征带。又因为当 $t = t^0$ 时, $\{x, w, q\}$ 的支体蜕化成为一点 (x^0, t^0) , 所以当 $t = t^0$ 时, $\{x, w, q\}$ 作成一個 $m-1$ 維的面素組 (当 $t = t^0$ 时, $q_i = -\varepsilon x_i (\sum a_{ij}^0 x_i x_j)^{-1/2}$, 所以本質上只有 $m-1$ 个参数)。并且特征带 $\{x, w, q\}(t, \pi)$ 的全体組成 m 維的面素組。由于它的支体 (以 x 代替 t , π 为独立变数) 恰好就是 m 維曲面 (37.9) ($u = t$), 所以它是 (37.1) 特征面的偏微分方程 (37.11) 的解 (參照 § 24)。因此 (37.9) 是 (37.1) 的特征面。

2. 解的唯一性 (決定區域) 設在 $m+1$ 維空間 (t, x) 中, 以 (t^0, x^0) 为頂点的后退錐的方程是

$$K: t^0 - t = \chi(x) \quad (= \sqrt{\sum \bar{a}_{\alpha\alpha}^0 \varphi_\alpha(x) \bar{\varphi}_\alpha(x)}). \quad (37.12)$$

当 $t^0 (> 0)$ 适当小时, 超平面 $t=0$ 对 K 所作的截口是 $m-1$ 維光滑

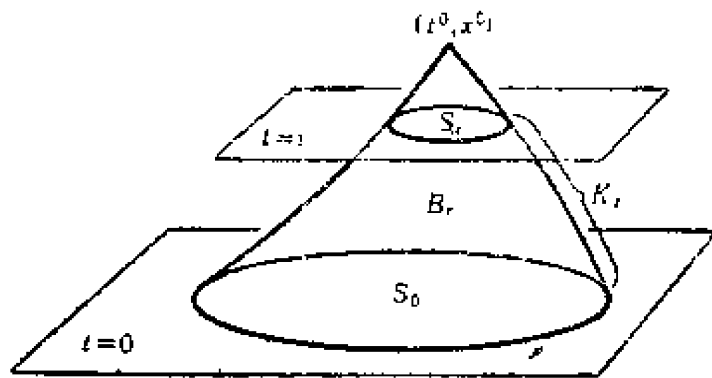


图 37.1

① 这里原书写法上有些混乱。在 (37.2) 以后, x 应理解为 $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$, 但在 (37.10) 中 $x_{m+1} = t = w$ 而 $x = (x_1, \dots, x_m)$, 因此在下面方程中原书的 $a_{ij}(x)$ 应当写成 $a_{ij}(x, w)$ 的函数。——校者注

的封闭曲面 ($m=2$ 时, 为封闭曲线, 见图 37.1)。以 S_0 表示在超平面 $t=0$ 上落在 K 内部的部分, 并以 B 表示 S_0 与 K 所包围的 $m+1$ 维区域 $[t>0, t^0-t>\chi(x)]$ 。设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是在 S_0 上已给的函数。于是成立下列定理:

定理 37.1 方程 (37.1) 满足初始条件 “在 S_0 上 $u=\varphi(x)$, $u_t=\psi(x)$ ” 的解 $u(t, x)$, 在 B 内可唯一地决定。换言之, 即 B 是 S_0 的决定区域。

证 考虑两个这样的解的差, 就知道只要证明, 满足 “ $f(t, x)=0$, $\varphi(x)=\psi(x)=0$ ” 的解 u , 必在整个 B 内恒等于 0 即可。设任取 $0<\tau<t^0$ 中的一个 τ , 以 S_τ 表示超平面 $t=\tau$ 上属于 K 内的部分 [即 $t=\tau, t^0-\tau>\chi(x)$]。再设 B_τ 是 K, S_0, S_τ 所围成的区域 [即 $0<t<\tau, t^0-t>\chi(x)$]。再设 K_τ 是 K 中对应于 $0<t<\tau$ 的部分为 K_τ 。再对任意的函数 u, v 令

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i u \partial_j v = Q(u, v),$$

那么容易证明下列等式成立:

$$\begin{aligned} 2u_t L[u] &= \partial_t \{u_t^2 + Q(u, u)\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \partial_i \left\{ 2u_t \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u \right\} + R[u], \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} R[u] &= 2u_t \sum_{i=1}^m \beta_i \partial_i u + \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i u \partial_j u + 2cu u_t \\ &\quad \left(a_{ij} = \partial_i a_{ij}, \beta_i = b_i + \sum_{j=1}^m \partial_j a_{ij} \right). \end{aligned} \quad (37.13)$$

其次, 设 n 是 K 指向外部的单位法线, 因为它对 t 轴与各 x_i 轴的方向余弦分别是

$$(t, n) = 1/\sqrt{1+\sum \partial_i \chi^2}, \quad (x_i, n) = \partial_i \chi / \sqrt{1+\sum \partial_i \chi^2},$$

所以对 B_τ 应用散度定理, 就得到

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{B_\tau} 2u_t L[u] d^{m+1}(t, x) = \left(\int_{S_\tau} - \int_{S_0} \right) \{u_t^2 + Q(u, u)\} d^m x \\
& + \int_{K_\tau} \{u_t^2 + Q(u, u) - 2u_t Q(u, \chi)\} (t, n) dS \\
& + \int_{B_\tau} R[u] d^{m+1}(t, x). \quad (37.14)
\end{aligned}$$

特別对于特征面 (37.12), 由于

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij} \partial_i \chi \partial_j \chi \right\}_{\chi=\chi_0} = Q(\chi, \chi)_{\chi=\chi_0} = 1;$$

所以当 $(t, x) \in K_\tau$ 时, 有

$$u_t^2 + Q(u, u) - 2u_t Q(u, \chi) = Q(u - c\chi, u - c\chi)_{c=u_t} \geq 0, \quad (37.15)$$

于是令

$$\int_{S_t} \{u_t^2 + Q(u, u)\} d^m x = E(t) \quad (\text{叫做关于 } S_t \text{ 的能量积分}),$$

则由 (37.14) 及 (37.15), 就有

$$E(\tau) \leq E(0) + \int_{B_\tau} R[u] d^{m+1}(t, x). \quad (37.16)$$

此外, 可以容易地得到正数 k_1 与 k_2 , 使得

$$R[u] \leq k_1 \{u_t^2 + Q(u, u)\} + k_2 u^2. \quad (37.17)$$

如再設 $\int_{S_t} u^2 d^m x = U(t)$, 則因 $u(t) = u(0) + \int_0^t u_t dt$ (当 u 是 t 的函数时), 所以当 $0 \leq t \leq t^0$ 时, 有

$$U(t) \leq 2U(0) + 2t^0 E(t) \quad \text{①}. \quad (37.18)$$

于是根据 $E(t)$ 与 $U(t)$ 的定义及 (37.17), (37.18) 就有

$$\int_{S_t} R[u] d^m x \leq kE(t) + k'U(0) \quad (k, k' \text{ 正的常数}),$$

① 由于 $u(t)^2 \leq 2u(0)^2 + 2t^0 \int_0^t u_t^2 dt$, 并且当 t 增加时, S_t 在 $t=0$ 上的正射影将逐渐縮小②。

② 因此双方对区域 S_t 积分, 就得到

$$U(t) \leq 2 \int_{S_t} u^2(x, 0) d^m x + 2t^0 E(t) \leq 2 \int_{S_0} u^2(x, 0) d^m x + 2t^0 E(t).$$

亦即 (37.18) 成立。——校者注

因此,适当选取正数 k_0 后,由 (37.16) 就有

$$E(\tau) \leq E(0) + k_0 U(0) + k \int_0^\tau E(t) dt \quad (37.19)$$

这里如再设

$$\gamma = E(0) + k_0 U(0), \quad \mu = \max_{0 \leq t \leq \tau} e^{-2kt} E(t), \quad (37.20)$$

则由 (37.19) 又得到

$$E(\tau) \leq \gamma + k \int_0^\tau \mu e^{2kt} dt = \gamma + \frac{1}{2} \mu e^{2k\tau}.$$

但是根据 (37.20), 有 $\mu \leq \gamma + \mu/2$, 即 $\mu \leq 2\gamma$, 所以有

$$0 \leq E(\tau) \leq 2(E(0) + k_0 U(0)) e^{2k\tau}. \quad (37.21)$$

如果 $E(0) = U(0) = 0$ 成立, 那就有 $E(\tau) = 0$. 由于 τ 是 $0 \leq \tau \leq t^0$ 中的任意数, 所以在整个 B 内 $u_t = 0$, 即 $u = 0$. 证毕

注意 2 如果 u, u_x, u_t 在 S_0 一致地相当小, 那么根据 (37.21), 在整个 B 内能量积分 $E(t)$ 也相当的小。但从此我们并不能断定 u_x, u_t 在整个 B 内都一致地相当小。特别当 $m=1$ 时, 根据第4章中的讨论, 我们知道, 如果 u, u_x, u_t 在 S_0 一致地相当小, 那么在整体 B 内 u, u_x, u_t 都将一致地相当小。但是当 $m \geq 2$ 时, 这个事实不成立。特别对于 $m=3$ 的波动方程

$$\partial_{tt}^2 u - \sum_{i=1}^3 \partial_{ii}^2 u = 0,$$

可设 $r = \sqrt{\sum x_i^2}$, 计算一下形状如

$$u = r^{-1} F(r+t)$$

的解, 就可了解上面的断言。这里 $F(s)$ 是二次连续可微函数。譬如设 $\tau > 0$ 而

$$F(s) = \begin{cases} 0 & (s < \tau), \\ \varepsilon(s-\tau)^\alpha & (s \geq \tau), \end{cases} \quad (1 < \alpha < 2)$$

① 这里可利用下列引理: 设 $I(\tau)$ 是定义在 $0 \leq \tau \leq t^0$ 上的一个非负连续可微函数而且满足 $\frac{dI}{d\tau} \leq cI(\tau) + d$ (c, d 是常数), 则成立不等式

$$I(\tau) \leq \frac{d}{c} (e^{c\tau} - 1) \quad \text{和} \quad \frac{dI}{d\tau} \leq de^{c\tau}.$$

以 $I(\tau) = \int_0^\tau E(t) dt$, $c = \gamma$, $d = k$ 就得到比 (37.21) 更好的估计式。引理证明不艰, 以 $e^{-c\tau}$ 乘双方, 移项再积分之, 就可以得到估计式。——校者注

如果 ε 相当小, 则当 $t=0$ 时, u, u_x, u_t (在有界范围内) 一致地相当小, 但是对 $(t, x) = (\tau, 0)$, u_t, u_x 将无穷大. $F(s)$ 一次連續可微, 但它的二阶导数在 $s=\tau$ 处成为无穷大. 只要把这样的解略加变形, 就能得到解 u , 它本身二次連續可微, 并且当 $t=0$ 时, u, u_x, u_t 为任意小, 但是在 $(t, x) = (\tau, 0)$ 处 u_t 的值将成为无穷大.

根据上面的事实就可以了解, 为什么当 $m \geq 3$ 时, 对于双曲型方程的 Cauchy 問題, 微分不等式 (比較定理) 不是适当的工具, 而用能量积分所表示的不等式, 在这里却起着重要的作用.

§ 38 波动方程的解法

1. Fourier 变换 要解一般常系数偏微分方程, Fourier 变换是最有效的工具. 为了容易理解它的理論, 我們設独立变数 x 的变域是整个 m 維空間, 而定义在空間内的复数值函数 $f(x)$ (x 代表 m 个实变数) 无限次連續可微. 如以 $D^k f(x)$ 表示它的任意 k 阶偏导数, 則假設对于任意的自然数 n, k 成立下列条件

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} |x|^{-n} \cdot D^k f(x) = 0, \quad \left(|x| = \sqrt{\sum_{v=1}^m x_v^2} \right), \quad (38.1)$$

这就是說: $f(x)$ 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时急速地减少. 我們把滿足这个条件的函数的全体記作 (\mathscr{S}) . 当积分变数的变域是整个的 m 維空間时, 我們在积分号下常略去代表积分区域的記号. 現在考虑属于 (\mathscr{S}) 的函数 $f(x)$ 的下列积分

$$g(y) = (2\pi)^{-m/2} \int f(x) e^{-ix \cdot y} d^m x \quad (i^2 = -1) \quad (38.2)$$

$(x \cdot y = \sum_{v=1}^m x_v y_v)$, 如果 f 属于 (\mathscr{S}) , 那么 g 也属于 (\mathscr{S}) , 并且关于 y 的微分可以在积分号下施行, 于是有

$$\partial_\nu g(y) = (2\pi)^{-m/2} \int (-i x_\nu) f(x) e^{-ix \cdot y} d^m x. \quad (38.3)$$

我們可以把 (38.2) 看成是把 (\mathscr{S}) 中的函数 f 变成 (\mathscr{S}) 中的函

数 g 的变换,它叫做 **Fourier 变换**。根据 (38.2), 反过来也能把 f 表示为 g 的积分(**逆 Fourier 变换**), 它的形状为

$$f(x) = (2\pi)^{-n,2} \int g(y) e^{ix \cdot y} d^n y. \quad (38.4)$$

因为逆变换公式, 仅仅是在 Fourier 变换 (38.2) 中以 $e^{ix \cdot y}$ 代替了 $e^{-ix \cdot y}$ 而得到的结果, 所以它具有与 Fourier 变换相同的性质。这样, Fourier 变换就形成了 (\mathscr{S}) 到自身的一一对应。此外, 对于 Fourier 变换, (L^2) 的范数是不变量, 即

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |g(y)|^2 dy. \quad (38.5)$$

注意 1 允许实行 Fourier 变换的函数不必限定是属于 (\mathscr{S}) 的, 只要是 (L^1) 的函数就够了。我们限制它为属于 (\mathscr{S}) 的函数, 是由于这样才能自由地进行任意次的微分运算。另外根据 (38.5) 可知, 如对属于 (L^2) 的函数实行 Fourier 变换 (适当地解释积分的意义), 那么结果也是 (L^2) 函数, 所以 Fourier 变换可以看成是 (L^2) 到自身的一个一一对应的酉变换 (见吉田耕作: Hilbert 空间论 § 12)。又由 (38.3) 可知, Fourier 变换把微分运算变成了乘法运算, 这一点将对偏微分方程的求解起着非常重要的作用。

2. 波动方程的解 现在来研究波动方程的定解问题。已知初始条件为: 当 $t=0$ 时, $u=\psi(x)$, $u_t=\varphi(x)$ 而波动方程为

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \quad \left(\Delta_x = \sum_{\nu=1}^n \partial_{x_\nu}^2 \right). \quad (38.6)$$

要得到这一问题的解, 可以先分别求方程 (38.6) 满足下列条件

$$t=0 \text{ 时, } \begin{cases} u_1=0, & \partial_t u_1=\varphi(x), \\ u_2=\psi(x), & \partial_t u_2=0 \end{cases}$$

的解 u_1, u_2 , 然后令 $u=u_1+u_2$ 即可。而求 u_2 的问题可以归结为求 u_1 的问题。事实上, 令 $v=\int_0^t u_2(\tau, x) d\tau$, 则有

$$\partial_t^2 v = \partial_t u_2, \quad \Delta_x v = \int_0^t \Delta_x u_2 d\tau = \int_0^t \partial_{\tau\tau}^2 u_2 d\tau = \partial_t u_2,$$

因此有

$$\partial_{tt}^2 v - \Delta_x v = 0, \quad v(0, x) = 0, \quad v_t(0, x) = \psi(x),$$

所以只要求出当 $t=0$ 时, $v=0$, $v_t=\psi(x)$ 的解, 再取 $u_2=\partial_t v$ 即可。

为了能够应用 §29 中的迭加原理来求 (38.6) 的解, 首先设

$$u = e^{i(\alpha \cdot x + \beta t)} \quad (i^2 = -1),$$

把它代入 (38.6) 后, 求出 α 与 β 的关系为

$$\beta = \pm |\alpha| \quad \left(|\alpha| = \sqrt{\sum_{r=1}^n \alpha_r^2} \right).$$

于是

$$u = e^{i\alpha \cdot x} \cos |\alpha| t, \quad e^{i\alpha \cdot x} \sin |\alpha| t$$

都是 (38.6) 的解。现在设 $f(\alpha)$ 是属于 (\mathcal{S}) 的任意函数, 如果设

$$u = (2\pi)^{-n/2} \int f(\alpha) e^{i\alpha \cdot x} \sin |\alpha| t d^n \alpha \quad (38.7)$$

(见注意 2), 则它也是 (38.6) 的解。它的初始值是

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } u=0, \quad u_t = (2\pi)^{-n/2} \int |\alpha| f(\alpha) e^{i\alpha \cdot x} d^n \alpha.$$

这样, 如果 $\varphi(x)$ 是属于 (\mathcal{S}) 的函数, 那末只要对方程

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int |\alpha| f(\alpha) e^{i\alpha \cdot x} d^n \alpha \quad (38.8)$$

解出 $f(\alpha)$, 就能得到所求的解。根据逆 Fourier 变换有

$$|\alpha| f(\alpha) = (2\pi)^{-n/2} \int \varphi(\xi) e^{-i\alpha \cdot \xi} d^n \xi. \quad (38.9)$$

所以根据 (38.7) 及 (38.9), 就得到下面的公式:

$$u = (2\pi)^{-n} \int \left\{ \int \varphi(\xi) e^{-i\alpha \cdot \xi} d^n \xi \right\} \frac{\sin |\alpha| t}{|\alpha|} e^{i\alpha \cdot x} d^n \alpha. \quad (38.10)$$

因为 $|\alpha|^{-1} \sin |\alpha| t$ 可对 (t, α) 无限次微分, 且

$$|\partial_t^p (|\alpha|^{-1} \sin |\alpha| t)| \leq |\alpha|^{p-1},$$

而 (38.10) 的右边, 在 $\{ \}$ 中的积分是属于 $(\mathcal{S})_x$ 的函数, 因此 (38.10) 对于 (t, x) 允许任意多次地进行形式微分。故 (38.10) 是

方程(38.6)的解。此外,根据逆变换的关系,还可以知道,这个解满足初始条件:

$$t=0 \text{ 时, } u=0, \quad u_t=\varphi(x),$$

注意 2 根据(38.9), 我们知道 $f(\alpha)$ 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 一般地将趋于无穷大。但是如(38.7)确实是(38.6)的解, 那么 $f(\alpha)$ 必定可积, 因此只要假设当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $f=O(|\alpha|^{-m})$, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, $f=O(|\alpha|^{-m-3})$ 就够了。此外, 为了使(38.10)是(38.6)的解, 只要 $\varphi(x)$ 为 $m+2$ 次连续可微, 并且当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, $D^p \varphi = O(|x|^{-m-1})$ 即可 (因为 \int 中的积分当 $|\alpha| \rightarrow \infty$ 时, 成为 $O(|\alpha|^{-m-2})$)。

3. Volterra-Hadamard 关于解的表示 如果把(38.10)中积分的顺序交换, 将得到

$$u = (2\pi)^{-m-2} \int \varphi(\xi) \left\{ \int |\alpha|^{-1} \sin |\alpha|t \cdot e^{i\alpha \cdot (x-\xi)} d^m \alpha \right\} d^m \xi.$$

但是现在 $\{ \}$ 中的积分并不收敛, 所以不允许作这样的计算。因此先定义如下的函数

$$v = (2\pi)^{-m-2} \int \psi(\alpha) \Phi_m(\alpha, t) e^{i\alpha \cdot x} d^m \alpha, \quad (38.11)$$

这里

$$\psi(\alpha) = (2\pi)^{-m-2} \int \varphi(\xi) e^{-i\alpha \cdot \xi} d^m \xi, \quad (38.12)$$

并且

$$\Phi_m(\alpha, t) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} |\alpha|^{-1} \cos |\alpha|t & (m \text{ 为奇数 } \geq 3), \\ (-1)^{\frac{m-2}{2}} |\alpha|^{-1} \sin |\alpha|t & (m \text{ 偶数}). \end{cases} \quad (38.13)$$

由于 $\partial_t^{m-2} \Phi_m = |\alpha|^{-1} \sin |\alpha|t$, 所以对(38.11)作形式微分后, 就有

$$\partial_t^{m-2} v = (2\pi)^{-m-2} \int \psi(\alpha) |\alpha|^{-1} \sin |\alpha|t \cdot e^{i\alpha \cdot x} d^m \alpha. \quad (38.14)$$

再根据(38.10), (38.12), (38.14)有

$$u = \partial_t^{m-2} v. \quad (38.15)$$

要证明公式(38.14)的正确性, 只需要注意下列事实就够了:

函数 Φ_m 当 $\alpha \neq 0$ 时, 对于 (α, t) 无限次的連續可微, 且

$$|\partial_t^p \Phi_m| \leq |\alpha|^{1+p-m},$$

此外, ψ 是属于 $(\mathcal{S})_\alpha$ 的函数。

再由 (38.11) 及 (38.12) 可以証明, v 能表示成为下面的形状:

$$v = \int_{|\xi| \leq t} K_m(\xi, t) \varphi(x + \xi) d^n \xi.$$

为了导出这个公式, 令

$$v_\rho = (2\pi)^{-n/2} \int_{|\alpha| \leq \rho} \psi(\alpha) \Phi_m(\alpha, t) e^{i\alpha \cdot x} d^n \alpha, \quad (38.16)$$

那么容易証明

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} v_\rho = v.$$

由 (38.12) 及 (38.16) (交換了积分的顺序), 有

$$v_\rho = (2\pi)^{-n} \int K_{m,\rho}(\xi, t) \varphi(\xi + x) d^n \xi, \quad (38.17)$$

这里

$$K_{m,\rho}(\xi, t) = \int_{|\alpha| \leq \rho} \Phi_m(\alpha, t) e^{-i\alpha \cdot \xi} d^n \alpha.$$

下面設 m 是奇数并且 ≥ 3 . 由 (38.13) 及 (38.17), 如令 $|\alpha| = r$, $\alpha = r\beta$, 則有

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} K_{m,\rho} = \int_0^\rho \left\{ \int_{|\beta|=1} e^{-i\beta \cdot \xi} d\omega(\beta) \right\} \cos rtdr, \quad (38.18)$$

($d\omega(\beta)$ 是单位球面 $|\beta| = 1$ 的面积元素). 等式右边 $\{ \}$ 中的积分, 由于球面的对称性, 是 $r \cdot \xi$ 的函数. 于是如設

$$\beta \cdot \xi = |\xi| \sigma \quad (-1 \leq \sigma \leq 1),$$

則在球面 $|\beta| = 1$ 上对应于 $d\sigma$ 的无穷狹的球帶面积是

$$d\omega = \omega_{m-1} (1 - \sigma^2)^{(m-3)/2} d\sigma.$$

由此就有

$$\int_{|\beta|=1} e^{-i\beta \cdot \xi} d\omega(\beta) = \omega_{m-1} \int_{-1}^1 (1 - \sigma^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{-i|\xi|\sigma} d\sigma.$$

因为这个积分只能取实数值, 所以設 $|\xi| \neq 0$, 由 (38.18) 有

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{m-1}{2}} K_{m,\rho} &= \omega_{m-1} \int_0^\rho \left\{ \int_{-1}^1 (1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{-i(t+\sigma)\eta} d\sigma \right\} e^{it\eta} d\eta \\ &= \frac{\omega_{m-1}}{|\xi|} \int_{-1}^1 (1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}} \left\{ \int_0^{|\xi|\rho} e^{-i\eta(\sigma-t/|\xi|)} d\eta \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

由于等式的左边是实数, 所以可以只取右边 $\{ \}$ 中的实数部分, 即

$$\Re \left\{ \int_0^{|\xi|\rho} e^{-i(\sigma-t/|\xi|)\eta} d\eta \right\} = \frac{\sin \rho \cdot \frac{|\xi|}{|\sigma-t/|\xi||} \left(\frac{\sigma-t/|\xi|}{|\xi|} \right)}{\sigma-t/|\xi|},$$

这样就得到了

$$K_{m,\rho} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\omega_{m-1}}{|\xi|} \int_{-1}^1 (1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\sin \rho \cdot \frac{|\xi|}{|\sigma-t/|\xi||} \left(\frac{\sigma-t/|\xi|}{|\xi|} \right)}{\sigma-t/|\xi|} d\sigma. \quad (38.19)$$

当 $\rho \rightarrow \infty$ 时 ($|\xi| \neq 0$), 根据熟知的 Dirichlet 积分定理 (见本丛书: Fourier 变换与 Laplace 变换 §4), 就得到

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} K_{m,\rho}(\xi, t) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\pi \omega_{m-1}}{|\xi|} (1-t^2/|\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}} & (|\xi| > t \geq 0), \\ 0 & (|\xi| < t). \end{cases} \end{aligned}$$

当 $m \geq 3$ 时, 对 $|\sigma| \leq 1$, 可以令 $h(\sigma) = (1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}}$, 对 $|\sigma| > 1$, 可以令 $h(\sigma) = 0$, 由于这样的 $h(\sigma)$ 在区间 $-\infty < \sigma < \infty$ 中是有界变分函数, 所以 (38.19) 右边的积分 \int_{-1}^1 对于 t, ξ, ρ 一致有界. 又因为 $\varphi(\xi)$ 属于 $(\mathcal{S})_\xi$, 所以在 (38.17) 中关于 $\rho \rightarrow \infty$ 的极限可以移在积分号下施行, 于是有

$$v = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| > t} K_m(\xi, t) \varphi(x+\xi) d^n \xi,$$

这里

$$\begin{aligned} K_m(\xi, t) &= c_m |\xi|^{-1} (1-t^2/|\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}} \\ &= c_m |\xi|^{2-m} (|\xi|^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}} \end{aligned}$$

(而 $c_m = (-1)^{(m-1)/2} \pi \omega_{m-1}$), 因而根据 (38.15) 就知道, 所求的解可以表示为

$$u = (2\pi)^{-m} c_m \partial_t^{m-2} \int_{|\xi| \geq t} |\xi|^{2-m} (|\xi|^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}} \varphi(x + \xi) d^n \xi. \quad (38.20)$$

当 m 为奇数且 ≥ 3 时, $(|\xi|^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}}$ 是 t 的 $m-3$ 次有理整式, 所以关于整个空间的积分有下面的公式:

$$(2\pi)^{-m} c_m \partial_t^{m-2} \int |\xi|^{2-m} (|\xi|^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}} \varphi(x + \xi) d^n \xi = 0.$$

把这个公式与 (38.20) 分别作和与差, 则积分变数的区域成为 $|\xi| \leq t$, 于是有

$$u = (2\pi)^{-m} c_m \partial_t^{m-2} \int_{|\xi| \leq t} |\xi|^{2-m} (t^2 - |\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}} \varphi(x + \xi) d^n \xi. \quad (38.21)$$

如果再设 $|\xi| = r$, $\xi_\nu = r\alpha_\nu$, 就有

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq t} |\xi|^{2-m} (t^2 - |\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}} \varphi(x + \xi) d^n \xi \\ = \omega_m \int_0^t M_m[\varphi](x, r) r (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} dr, \end{aligned}$$

这里

$$M_m[\varphi](x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int_{|\alpha|=1} \varphi(x + r\alpha) d\omega(\alpha), \quad (38.22)$$

故 $M_m[\varphi](x, r)$ 恰好就是 φ 在以 x 为中心, r 为半径的球面上的平均值。这样, 就可以把 (38.21) 写成

$$u = C_m \partial_t^{m-2} \int_0^t M_m[\varphi](x, r) r (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} dr. \quad (38.23)$$

为了具体算出 C_m 的值, 我们考虑 $\varphi(x) \equiv 1$ 的特殊情形, 这时, 所求的解就是 $u = t$, 所以有

$$t = C_{m-2} \partial_t^{m-2} \int_0^t r (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} dr.$$

但是

$$\int_0^t r (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} dr = t^{m-1} \int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{m-3}{2}} ds = t^{m-1} / (m-1),$$

所以 $C_{m-2} = 1 / (m-2)!$. 最后就得到

$$u = \frac{1}{(m-2)!} \partial_t^{m-2} \int_0^t r (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} M_m[\varphi](x, r) dr. \quad (38.24)$$

特别, 当 $m=3$ 时, 成立着 Kirchhoff 公式

$$u = t M_3[\varphi](x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\alpha=1} \varphi(x + t\alpha) d\omega(\alpha). \quad (38.25)$$

4. 降维 上面仅讨论了 m 是奇数并且 ≥ 3 的情形, 如果 m 是偶数, 那么只要考虑对 $m+1$ 维空间第 $m+1$ 个变数 x_{m+1} 是常数的函数, 就能把它化成 $m+1$ 是奇数而 ≥ 3 的情形来求解。即把 $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ 及 $u(t, x_1, \dots, x_m)$ 分别看作 (x_1, \dots, x_{m+1}) 及 (t, x_1, \dots, x_{m+1}) 的函数, 并在 (38.24) 中以 $m+1$ 代替 m 就得到

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(m-1)!} \partial_t^{m-1} \int_0^t r (t^2 - r^2)^{\frac{m-2}{2}} M_{m+1}[\varphi](x, r) dr \quad (m \geq 2) \\ &= \frac{m-2}{(m-1)!} \partial_t^{m-2} \int_0^t t (t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}} r M_{m+1}[\varphi](x, r) dr \quad (m \geq 4). \end{aligned} \quad (38.26)$$

如果把关于 $m+1$ 维空间球面的均值表示成为 m 维空间的积分, 就有

$$\begin{aligned} M_{m+1}[\varphi](x, r) &= \frac{2}{\omega_m r^m} \int_{|\alpha| \leq r} \varphi(x + \alpha) (1 - |\alpha|^2 / r^2)^{-1/2} d^n \alpha \\ &= \frac{c_m}{r^{m-1}} \int_0^r M_m[\varphi](x, \rho) \rho^{m-1} (r^2 - \rho^2)^{-1/2} d\rho \\ (c_m &= 2\omega_{m-1} / \omega_m). \end{aligned} \quad (38.27)$$

这样, 对于 $m \geq 4$, 就得到

$$\begin{aligned} & \int_0^t t(t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}} r M_{m-1}[\varphi](x, r) dr \\ &= c_m t \int_0^t M_m[\varphi](x, \rho) \rho^{m-1} \left\{ \int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}} dr \right\} d\rho. \end{aligned}$$

为了计算等式右边的 $\{ \}$, 令

$$1 - \rho^2/r^2 = (1 - \rho^2/t^2)z,$$

则有

$$(t^2 - r^2)r^{-2} = (t^2 - \rho^2)\rho^{-2}(1 - z),$$

$$dr = \frac{1}{2} \rho^{-2} r^{-3} (1 - \rho^2/t^2) dz,$$

因此

$$\begin{aligned} & \int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}} dr \\ &= \frac{1}{2} t^{-1} (t^2 - \rho^2)^{\frac{m-3}{2}} \rho^{2-m} \int_0^1 (1-z)^{\frac{m-4}{2}} z^{-1/2} dz. \end{aligned}$$

再根据(38.26), (38.27)就得到

$$u = C_m \partial_t^{m-2} \int_0^t M_m[\varphi](x, \rho) \rho (t^2 - \rho^2)^{\frac{m-3}{2}} d\rho. \quad (38.28)$$

这个公式的形状与(38.24)完全一样,所以可以用前节同样的方法计算 C_m , 而得到 $C_m = 1/(m-2)!$. 当 $m=2$ 时, 无论用(38.26)式或是上面的公式都能得到相同的结果, 即

$$u = \int_0^t \rho (t^2 - \rho^2)^{-1/2} M_2[\varphi](x, \rho) d\rho.$$

5. 非齐次方程的解法 如果对一般的二阶双曲型齐次线性方程(t, x 为独立变数)

$$L[u] = 0 \quad (38.29)$$

已经得到了当 $t=\tau$ (τ 任意)时的初值问题的解, 那么就可以用来导出非齐次方程

$$L[u] = f(t, x) \quad (38.30)$$

的解。现在假设 $\partial_t^2 u$ 的系数为 1, 设方程 (38.29) 当 $t=\tau$ 时满足条件 $u=0, u_t=f(\tau, x)$ 的解是 $u=v(t, x; \tau)$, 此外, v 对于 (t, x) 的直到二阶的导数对一切的 $(t, x; \tau)$ 都是连续的。令

$$u = \int_0^t v(t, x; \tau) d\tau, \quad (38.31)$$

由于 $v(\tau, x; \tau) = 0, v_t(\tau, x; \tau) = f(\tau, x)$, 所以有

$$\partial_t u = \int_0^t v_t(t, x; \tau) d\tau, \quad \partial_t^2 u = f(t, x) + \int_0^t v_{tt}(t, x; \tau) d\tau.$$

由此(再因为 $L[v]=0$), 就得到

$$L[u] = f(t, x) + \int_0^t L_t[v] d\tau = f(t, x).$$

由 (38.31) 还可导出

$$t=0 \text{ 时}, \quad u=0, \quad u_t=0. \quad (38.32)$$

即 (38.31) 是方程 (38.30) 满足初始条件 (38.32) 的解, 特别对于 $m=3$ 的波动方程, 由于满足 $t=\tau$ 时, $u=0, u_t=f(\tau, x)$ 的解是

$$v(t, x; \tau) = (t-\tau) M_3[f]_x(x; t-\tau) \quad (t \geq \tau),$$

所以非齐次波动方程

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = f(t, x)$$

满足初始条件 (38.32) 的解可用下列公式表示:

$$u = \int_0^t (t-\tau) M_3[f]_x(x, t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau M_3[f]_x(x, \tau) d\tau. \quad (38.33)$$

§ 39 关于双曲型方程的补充说明

现在简单地介绍一些本章讲解得不够充分的问题。

1. 作为解的不连续曲面的特征面 二阶线性方程的特征面具有一个特征, 即可以解释为解的不连续曲面。设解在曲面 S 的两侧, 与它的一阶导数都是连续的, 并且当沿着 S 的两侧趋近于 S

时,二阶导数虽一致收敛,但是在 S 的两侧却有不同极限值。这样,光滑曲面 S 就非是特征面不可。此外,在适当地拓广了解的意义后,也能把沿着曲面 S ,解自身将不连续或是它的一阶导函数将不连续,作为特征面的特征。

2. 双曲型方程的基本解 利用 $r(x, y) = \sqrt{\sum (x_\nu - y_\nu)^2}$, 我们知道 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的基本解,当 $m = 2$ 时为 $(2\pi)^{-1} \log r(x, y)$, 当 $m \geq 3$ 时为 $((m-2)\omega_m)^{-1} r(x, y)^{2-m}$. 由于 Laplace 方程的形状和波动方程的形状相象,所以令

$$r(t, x; \tau, \xi) = \begin{cases} \sqrt{(t-\tau)^2 - \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2} & (|x - \xi| < t - \tau), \\ 0 & (|x - \xi| > t - \tau) \end{cases}$$

后,函数 $C_m r(t, x; \tau, \xi)^{2-m}$ 是否起着波动方程基本解的作用呢? 对于这个问题,由于在以 (τ, ξ) 为顶点的射线锥 $(t-\tau)^2 = \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2$ 的表面上 $r = 0$, 所以利用 r 所作的积分不收敛。Hadamard 使用了一种所谓取发散积分的有限部分的技巧,把当 m 等于奇数时问题解决了(当 m 等于偶数时,可以使用降维法)。

对于一般的双曲型方程(36.26),令 $(a_{ij})^{-1} = (A_{ij})$, 并令

$$\delta = \int \sqrt{\tilde{d}t^2 - \sum A_{ij} dx_i dx_j}$$

为曲线的弧长,这时,设沿着测地线的距离为 $r(tx; \tau, \xi)$, 利用这个函数就能够导出拟基本解。参看 Courant-Hilbert II, p. 430 或 Hadamard: Le problème de Cauchy.

M. Riesz 根据推广到高维空间的 Riemann-Liouville 积分,得到了对任意高阶方程统一的求基本解的方法,这可参看 L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math., 81 (1954)。不过这种情形的基本解并不是在普通意义的函数,而是在广义函数的意义下得到的。

3. Asgeirsson 定理 关于常系数超双曲型(也可以是正规

双曲型)的齐次方程的解法,可以归结为解 $2m$ 个独立变数 $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ 的下列方程

$$\Delta_x u - \Delta_y u = 0.$$

对于这种方程, L. Asgeirsson 发现了(1932年)一个巧妙的均值定理:

$$\frac{1}{\omega_m} \int_{|\alpha|=1} u(x+r\alpha; y) d\omega(\alpha) = \frac{1}{\omega_m} \int_{|\alpha|=1} u(x; y+r\alpha) d\omega(\alpha).$$

根据这个公式,使用降维法,就能导出波动方程的解。詳見 Courant-Hilbert II, p. 417.

4. 对称的双曲型联立一阶方程組 三維空間的 Maxwell 方程(u, v 为向量)为

$$\partial_t u = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} v, \quad \partial_t v = \frac{1}{c} \operatorname{rot} u,$$

如果令 $u + iv = w$ ($i^2 = -1$), 那么可以把它看作是下列对称的联立一阶方程組

$$\partial_t w_\lambda = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=1}^k a_{\kappa\lambda\mu}(t, x) \partial_\mu w_\kappa + \sum_{\kappa=1}^k b_{\kappa\lambda}(t, x) w_\kappa + f_\lambda(t, x)$$

$$a_{\kappa\lambda\mu} = \bar{a}_{\lambda\kappa\mu} \quad (\text{共轭数})$$

的特殊情形。二阶双曲型方程也能归结为这种形状。对于这种方程組, Friedrichs 与 Lax 以有关能量积分的不等式作为基础, 使用 Hilbert 空間的方法来研究方程的广义解, 并且导出了 Cauchy 問題的解的存在定理。詳見南云道夫著: 近代偏微分方程式論(共立社)第4章。

5. 单参数-半群法 吉田耕作最近指出, 在抛物型方程中使用成功的单参数-半群法理論(Hille-Yosida 理論)中的“算子的指数函数”, 可以适当地应用于二阶双曲型方程, 并对 Cauchy 問題給出了值得注意的解法。詳見“数学”第8卷2号(日本数学会)。

6. 高阶的双曲型方程 对于一般的高阶联立綫性方程組的

情形, Petrovski 曾给出了双曲型方程的定义, 并且证明了 Cauchy 问题解的存在定理 (Mate. Sbornik, 2(44), 1937, p. 814~838)。后来 J. Leray 指出了 Petrovski 证明中的缺点。集一般线性双曲型方程 Cauchy 问题理论的大成于 Hyperbolic differential equations (Princeton, 1952) 一书。在导出一些作为一般高阶偏微分理论基础的积分不等式的过程中, Fourier 积分起着基本的作用。

不论 Petrovski 或是 Leray 的理论, 都使用了关于解析正则方程的 Cauchy-Kowalewski 定理。最近白田平引入了 Lax 所考虑的方法, 用完全泛函分析的方式建立了包括抛物型方程的统一理论, 见 Osaka Math. Jour., 9(1957), p. 43~59。

后 記

偏微分方程是一門內容豐富的學科，但本書只能介紹到此為止，雖然作者已竭盡全力之所及，這裡總不免帶有一定的片面性。由於作者水平所限，在敘述上可能只注意於一些細節而不能照顧到全局，使全書的綱領不夠鮮明。在內容安排上，由於篇幅的限制，對於全微分方程和切觸變換未曾觸及，而對於高階方程、拋物型方程等也幾乎全部割愛。最近由於泛函分析的發展（在日本，這方面以小平邦彥為先驅，吉田耕作、加藤敏夫、溝畑茂、白田平、伊藤清等人均有進一步的研究），已使偏微分方程的理論為之一新，我們在本書中未能收集這方面的內容，感到非常遺憾。好在本書中有吉田耕作的“泛函分析”，以相當篇幅介紹了新的偏微分方程理論，有岩村聯的“廣義函數論”，詳細闡述了近代偏微分方程理論中必需的內容，還有犬井鉄郎等的“偏微分方程的應用”，以及其他有關書籍等，都可以彌補本書之不足。最後，謹對彌永昌吉和吉田耕作表示深切的謝意。

参 考 书

- 1) BERNSTEIN: Existence theorems in partial differential equations (Ann. of Math. Study), (1950)
- 2) BERS, BOCHNER and JOHN: Contributions to the theory of partial differential equations (Ann. of Math. Study), (1954).
- 3) CARATHÉODORY: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, (1935).
- 4) COURANT und HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, I, II, (1931), (1937).
- 5) DUFF: Partial differential equations, (1955).
- 6) GOURSAT: Lecons sur l'intégrations des equations aux dérivées partielles du premier ordre, (1921).
- 7) HADAMARD: Le problème de Cauchy et les equations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, (1932).
- 8) 福原満洲雄: 微分方程式, 上, 下, (朝倉).
- 9) 井上正雄: ポテンシャル論, (共立全書).
- 10) 犬井鐵郎: 応用偏微分方程式論, (岩波).
- 11) JOHN: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, (1955).
- 12) LERAY: Hyperbolic differential equations (Lecture notes at the Inst. for Adv. Study), (1952)
- 13) MIRANDA: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico (Ergeb. der Math.), (1955).
- 14) PETROVSKI: Lectures on partial differential equations, (1954).
- 15) PICARD: Lecons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, (1927).
- 16) PICARD: Lecons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, (1930)
- 17) SAUER: Anfangswertproblem bei partiellen Differentialgleichungen, (1952).
- 18) SCHWARTZ: Theorie des distributions, I, II, (1950). [岩村 聯訳: 超函数論, (岩波)].
- 19) 吉田耕作: 微分方程式の解法, (岩波全書).
- 20) 吉江琢児: 初等一階偏微分方程式, (裳華房).

校 后 記

林 坚 冰

对有兴趣于偏微分方程的同志来说，这是一本值得推荐的参考书。作者在短短的二百頁內，以精炼的形式概括地介绍了偏微分方程古典理論中的主要結果，并且在这个基础上引进了一些和近代理論有关的基本概念。

偏微分方程論是一門古典数学，內容丰富深刻，而且联系到各个方面，要在一本小册子里作較有系統的介紹，除了在叙述形式上需要讲究外，对內容沒有大刀闊斧的取舍也是不行的。因此，正如作者自己所說的，在这里完全删掉有关抛物型方程，高于二阶的方程以及全微分方程等等的部分。尽管如此，念过这本书后，讀者至少对偏微分方程的古典結果会有个概括的了解。在形式方面，作者也采用了最省篇幅的向量写法和一些特殊的記号，叙述条理分明，論証也比較严密。只要具有数学分析基础知識的同志基本上都能看得懂。但是由于作者过多地追求形式的演算，而談問題又尽量从一般情况出发，因而对沒有学过大学“数学物理方程”这門課的讀者来说，有些結果和論証的实质精神就不大容易理解^①。书中有的章节的后面还附有习题，并不頂难。通过练习可以对正文有更深入的理解

看完这本书后，如果讀者希望沿着作者的思路要进一步了解

① 最近出版一本高等学校交流讲义“数学物理方程”（兰州大学，北京大学等編著。高等教育出版社，1961）。沒有学过这門課的同志在閱讀本书的过程时可結合起来念。

偏微分方程的近代理論，則可以參看原作者所著的《近代偏微分方程論》（近代數學叢書 4-B，共立社）。我國自編的有关偏微分方程的參考書并不多，值得介紹的有吳新謀編著的[1]和復旦大學編寫的教材[2]。吳本的特点是材料豐富，習題多；特別是第三冊，大部分介紹近代成果，其中末一章對泛函分析在數理方程上的應用有較詳盡的介紹，可補本書的不足。復旦大學一書是在教學改革後編的，對各種古典方法處理的觀點較高，富有啟發性。念過本書後再瀏覽一下那本書，相信對本書所提到的各種解法的特点和作用會有進一步的認識。

下面談談校讀這本書的體會。看來，作者在闡述問題、方法和概念方面力求抓住關鍵，不因小失大。譬如，問題談得很集中：把兩自變數的二階方程和一階方程組歸在一起，着重討論半線性方程的分類以及雙曲型方程的 Cauchy 問題，而對於特征問題、混雜問題干脆不提；對一階非線性方程也着重談 Cauchy 問題。在方法的選擇上，作者也有所側重：對於適用半線性方程的逐次逼近法就在 § 19 和 § 22 中仔細加以討論；由於篇幅限制，對勢函數法只作簡要的介紹；而上下函數法、分離變數法等等就精簡不談。各章節都很注意新概念的引進，而第五章可以說是主要在介紹象特征面，強、弱解，平面波這些概念。總之，作者對於問題非典型的不講，方法講不透不講，概念不是基本的也不講，其結果就顯得前後呼應，重點突出。

其次，作者在問題和解法的配合方面也下過功夫。例如迭合原理是放在 § 29 常系數方程平面波的解中來講；對於兩自變數調和方程則直接用復函數理論來論述；柵函數方法是在證明非自伴方程 Dirichlet 問題解的唯一性定理時順便提出；Fourier 變換則在波動方程的 Cauchy 問題的解法中加以介紹。這樣安排的結果，問題講夠了，方法也差不多都作了交代。此外，作者把

Hadamard 反例和解的存在、唯一性以及适定性問題放在 § 22 中討論关于双曲半綫性一阶方程組决定区域的时候提出来, 然后在 § 37 談到波动方程 Cauchy 問題时, 又抓住机会举例說明在不同度量下理解連續依从这概念的重要性。从这些例子都可以看出作者的匠心。总的說来, 后三章写得比前面更好些。特別在第 6, 7 两章的末节也和 [6] 一样附有作者自认为主要的問題及有关的文献, 对准备进一步专题研究的讀者來說值得参考。

本书不足的地方, 主观上认为有如下几点:

首先形式演算居多, 只求数学結論的完善, 而对于这些結論所反映的物理現象的本质則极少談到。除了在 § 16 举出中心力場运动方程等个别的例子以外, 在其余各章节以及习题中就看不到数学和物理力学的联系。实际上, 象广义解引进的必要性, 适定性問題的重要性等等都可以从物理現象加以說明。此外, 决定区域、能量积分反映出波傳播速度的有限性; 特征面上解間断的力学意义等等也应当予以注意。虽然这样会占用一些篇幅(也不多!), 但作为应用丛书來說, 这些都是不可缺少的部分。

其次, 作者所沒有談到的有些問題和方法無論从实用上或者从理論上來說都是不能省略的。例如, Laplace 双曲型方程的 Riemann 方法和特征問題; 波动方程的混雜問題和分离变数法等等。关于这些都应当有独立的章节加以討論。此外, 象混合型方程的标准化問題以及某些有力的直接方法, 也尽可以安排在有关的部分作簡單的介紹。

最后, 在各章节附注中, 作者談到日本和西方数学家工作較多而对苏联学派的工作除了提到 Берштейн, Петровский 和 Олейник 等的个别工作外, 其他象 Петровский 的窩隙理論, Смирнов 的函数不变解方法, Соболев 学派的工作等等就沒有作簡要的介紹。好在这一点对于长期学习苏联的我們來說, 影响并不頂大。

下面介紹本书各章主要内容，并且补充一些必要的基础知識和值得参考的著作。由于学識有限，主觀片面在所难免。

第1章主要是介紹 Cauchy-Kовалевская 定理以及特征曲面的定义，証明定理的强級数方法只作介紹，特征曲面也只是对半綫性一阶方程組和高阶方程加以定义。对一般情况的 Cauchy-Kовалевская 定理詳細的論証可参考[16]第8章和[6]§2。关于特征曲面一般的定义可参考[6]§3。

第2章主要是介紹一阶拟綫性方程 Cauchy 問題的特征解法，在§8中所提到的关于主部相等的拟綫性方程組的結果不过是前面几节的推广。实际上应当注意的是有关于完全方程組的理論，因为它不但表明偏微分方程組和常微分方程組或代数方程組本质上不同的地方，而且对于寻求完全积分也是有用的。关于这方面的知識可参考[5]第118~119段或者[18]§27。

第3章主要是介紹一阶非綫性方程 Cauchy 問題的特征綫法和完全积分解法。在§16还附帶談到 Hamilton-Jacobi 方程及其特例。关于常碰到的 Poisson-Jacobi 括号以及完全积分的求法可参考[5]第117~122段和[18]§2.8。至于 Hamilton-Jacobi 原理及其应用，[18]§2.5~§2.6也可以作为补充。

第4章論述有关两个自变数的半綫性二阶偏微分方程的主要結果。在§18作者談到方程的分类和标准化問題。这里关于混合型方程标准化的 Cibrario 定理应当提起注意。关于这方面的問題可参考[14],[15]。如果对混合型方程理論有兴趣的話，讀者还可以参看[11],[15]。在§19談到半綫性双曲型方程 Cauchy 問題的解法时，作者只詳細介紹逐次逼近法，而对于重要的 Riemann 方法則沒有介紹。关于这方法，与它有关的特征問題以及在解 Euler-Poisson 方程上的应用可参看[1]第五章或[18]§3.4, §3.7。§20談到用复函数論方法来解关于圓域的 Dirichlet

問題。这里要补充的斜微商和其他边值問題可參看[13]第三章55段。至于对一般区域的 Dirichlet 問題的上下函数法和势位論方法則可參考[6] § 31 和 § 34。

第5章着重介紹一般二阶綫性方程論中某些常用的概念。例如, 特征面、特征射綫、余法綫、平面波、广义解等等。在介紹广义解时作者只是对强、弱解下了定义, 至于广义解引进的必要性和定义的多样性就无法作全面的交代。对于广义解最直觀的解釋可參考[12]第六章 § 6。在[3]第22讲中和[6] § 9 都提到引进广义解的必要性, 也可以作为补充。如果要了解关于这方面 *Соболев* 学派的工作請參看专著[8]。对特征面和方程的分类, 作者也仅仅作了形式上的定义。如果讀者对于特征面和强弱間断解的关系以及它們的力学意义需要了解的話, 可參看[5]第 141~142, 161~163 段。关于二阶偏微分方程怎样表現出各种不同物理現象的規律, 参考书[4]有比較全面的介紹。讀者如果对于半群理論在微分方程上的应用感到兴趣, 則可參看[17]第 20 章。

第6章着重介紹綫性橢圓型方程的一些基本結果和解法大意。在 § 31 作者闡述关于自伴橢圓型方程的 Dirichlet 原理。在 § 32 則詳細討論了 Poisson 方程的 Dirichlet 問題。但是往后两节只是泛泛地介紹一般橢圓型方程的基本解和 Green 函数, 对于問題的解决还差得远。关于变分原理及其解法可參考[7]第二、三章, 在那里讲得比較透徹。关于势位論方法[1]第十章前几节有詳細的讲解。这两部分都可以弥补本书的不足。至于追記中所提到的 Schauder 估計法在[19]第5章有詳尽的介紹。这一本专著还總結了近代有关橢圓型方程的主要工作, 值得參考。此外, 我們认为, 在高阶方程方面 *Соболев* 多重調和方程的工作[8]应当提起注意。

第7章着重介紹綫性正規双曲型方程 Cauchy 問題的两个古

典的結果：一是能量积分不等式和唯一性定理；一是波动方程 Cauchy 問題的解的表达式。这里要用到 Fourier 变换的理論，关于这方面的参考书~~多~~多，我們只推荐篇幅較小而且着重談积分变换在数学物理中的应用的两本参考书[9]，[10]。其他如 Asgeirsson 公式、双曲方程的基本解，作者只是在末一节追記中提到。关于 Asgeirsson 公式可参考[1]第五章。至于一般綫性正規双曲型方程的 Hadamard 和 Соболев 解法可参看[1]第九章。双曲型方程的另一个基本問題是混杂問題，这里并没提到。关于这方面的历史介紹及其解法可参看专著[20]。

参 考 书

- [1] 吳新謀：数学物理方程第一、二、三冊，科学出版社，1959。
- [2] 复旦大学数学系：数学物理方程，上海科学技术出版社，1960。
- [3] С. Л. Соболев：数学物理方程，1954，錢敏等譯，高等教育出版社。
- [4] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский：数学物理方程，1953，黃克欧等譯，高等教育出版社。
- [5] И. В. Смирнов：高等数学教程，1953，四卷二分冊，谷超豪、金福临譯，高等教育出版社。
- [6] И. Г. Петровский：偏微分方程讲义，1953，段虞荣譯，高等教育出版社。
- [7] С. Г. Михлин：数学物理中的直接方法，1950，周先意譯，高等教育出版社。
- [8] С. Л. Соболев：泛函分析在数学物理中的应用，1950，王柔怀等譯，科学出版社。
- [9] C. J. Tranter：数学物理中的积分变换，潘德惠譯，高等教育出版社，1959。
- [10] М. И. Конторович：运算微积分学和电路中不稳定現象，1953，胡汝鼎、謝汝宪譯，上海科学技术出版社。
- [11] F. Tricomi：論二阶混合型綫性偏微分方程，邱佩璋、王光寅譯，科学出版社，1957。

- [12] A. И. Александров 等: 数学——它的内容、方法和意义, 第二卷, 秦元勋等译, 科学技术出版社, 1959.
- [13] М. А. Лаврентьев и Б. А. Шабат: 复变函数论方法, 施祥林、夏定中译, 高等教育出版社, 1956.
- [14] A. B. Бицадзе: 线性微分方程中的某些线性问题, 数学进展, 4 卷 5 期, 1958.
- [15] A. B. Бицадзе: Уравнения смешанного типа (итогы науки), изд. А. Н. СССР, 1959.
- [16] R. Courant and D. Hilbert: Методы математической физики, Том II. Гостехиздат, 1945.
- [17] E. Hille: Functional analysis and semigroup, 1948.
- [18] F. Tricomi: Лекции по уравнениям в частных производных, изд. ил, 1957.
- [19] K. Miranda: Уравнения с частными производными эллиптического типа, изд. ил, 1957.
- [20] O. A. Ладыженская: Смешанная задача для гиперполического уравнения, гостехиздат, 1953.